आर.बी.एस.बी. (अनुसंधान अधिकारी — सां.सू.प्र.वि.) 2010
R. B. S. B. (R.O.—DSIM) 2010

पूर्वाह्न
FORENOON

परीक्षा कूट
TEST CODE : D

प्रश्नपत्र 2—(वर्णनात्मक स्वरूप)
PAPER II—(DESCRIPTIVE TYPE ON STATISTICS)

[**समय** : पूर्वाह्न 9-30 से अपराह्न 12-30 बजे तक]
(पूर्णांक 100)

[Time : 09-30 A.M. to 12-30 P.M.]
(Maximum Marks 100)

अनुदेश.—(1) उम्मीदवार किसी खंड में से दो से ज्यादा प्रश्नों का चुनाव न करते हुए किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं। यदि उम्मीदवार ने पाँच से ज्यादा प्रश्नों के उत्तर दिए हैं तो उत्तर दिए गए प्रश्नों के क्रमानुसार केवल पहले पाँच प्रश्नों का मूल्यांकन किया जाएगा तथा शेष उत्तरों को अनदेखा कर दिया जाएगा।

(2) प्रत्येक प्रश्न के 20 अंक हैं।

(3) उत्तर **हिन्दी** अथवा **अंग्रेजी** में ही लिखें।

(4) **प्रत्येक खंड के प्रश्नों के उत्तर अलग उत्तरपुस्तिकाओं/ अनुपूरकों (सप्लीमेंट्स) पर दिए जाने चाहिए।**

(5) प्रत्येक प्रश्न का उत्तर नये पृष्ठ से शुरू करें और सबसे ऊपर प्रश्न संख्या अवश्य लिखें।

(6) उत्तरपुस्तिका पर नाम, अनुक्रमांक आदि उनके लिए निर्धारित स्थान पर लिखे जाएँ। अनुपूरकों (सप्लीमेंट्स) पर नाम अथवा अनुक्रमांक नहीं लिखे जाने चाहिए।

(7) उम्मीदवारों को अपने ही पेन, पेंसिल, इरेजर, पेंसिल-शार्पनर और फुटरूल इस्तेमाल करने चाहिए।

(8) उम्मीदवारों को कोई भी संदर्भ पुस्तिकाएँ, पाठ्यपुस्तकें, गणितीय टेबल, इंजीनियरिंग टेबल, अथवा अन्य उपकरण नहीं दिये जाएँगे और न ही उन्हें उनके इस्तेमाल की अनुमति दी जाएगी, यहाँ तक कि वे उन्हें अपने पास रख भी नहीं सकेंगे। इस नियम का उल्लंघन करने पर दंड दिया जा सकता है। नॉनप्रोग्रामेबल इलेक्ट्रॉनिक कॅलक्युलेटर के प्रयोग की अनुमति है।

(9) समस्त कच्चा कार्य (रफ वर्क) उत्तरपुस्तिका के अंतिम तीन अथवा चार पृष्ठों में किया जाएँ ; माँगने पर अतिरिक्त पुस्तिकाएँ दी जाएँगी, जिन्हें लौटाने से पूर्व उत्तरपुस्तिका के साथ संलग्न किया जाना चाहिए।

[पलटकर देखिए

प्रश्नपत्र 2 (वर्णनात्मक स्वरूप)

खंड A : Probability और Sampling

1. (अ) बुनियादी असमानता लिखकर सिद्ध कीजिए ।

   (ब) दर्शाये की $P(0 < X < 6) > \frac{2}{3}$ अगर x का pdf $f(x) = \frac{e^{-x}x^2}{2}, x > 0$ और = 0, अन्यथा है।

2. (अ) रेखिका योजनाबद्ध नमूना चयन का वर्णन करें अगर N = nk और $Y_i = i$, i = 1, 2, ..., N के लिए $\overline{Y}_{sys}$ का प्रसरण निर्धारित कीजिए।

   दर्शाये की इस स्थिती में योजनाबद्ध नमूना चयन जादा साटीक (Precise) है सरल नमूना चयन के मुकाबले।

   (ब) नर्सरी में पौधे विक्री के लिए उगाये जाते हैं। सलाह दी जाती है, वसंत के पूर्व कितने स्वस्थ पौधे तैयार रहें इसका आकलन हो नमूना चुनना पद्धती के अध्ययन से कुल अंकुर किया 1 फीट चौड़ी और 400 फीट लंबे bed of silver maple seedlings से विवरण प्राप्त किया नमूना चयन के चटाई क्षेत्र की लंबाई एक फीट थी, ताकि N = 400 संपूर्ण गणना में चटाई क्षेत्र की औसत $\overline{Y}$ = 1.96, S^2 = 80,से सनिष्ट की सही मूल्य (Value) है। सरल यादृच्छिक नमूना चयन से कितने इकाइयों लेना जरूरी है $\overline{Y}$ आकलन के लिए सही मूल्य के 10% भीतर साथ में 95% गुणांक सहगुनक (confidence coefficient) ($Z\alpha$ = 1.96)।

3. (अ) अनुपात आकलन की व्याख्या दीजिये। दर्शायें कि झुकान (biased) है। Unbiased ratio प्रकार के आकलन ज्ञात पद्धती बताईये।

   (ब) एक समिष्ट (population) में 5 इकाइयों (units) हैं साथ में Y वस्तुरचने (2,3,5,6,8) संख्या गाण की और सहायक (auxiliary) वस्तुचर X ने (1,2,3,4,5) संरचना गाण की है। 3 परिमाण क्रमरहित नमूना प्रतिस्थापन के बिना विचार करें और झुकान (bias) $\hat{\overline{Y}}_R$ प्राप्त करे [$\hat{\overline{Y}}_R$ दर्शाता है समिष्ट औसत का ratio आकलक]

खंड B : रेखीय प्रतिरूप और अर्थ सांख्यिकी

4. (अ) सामान्य प्रतिरूप $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{e}$ जहाँ $\underline{e} \sim N(0, \sigma^2 I_n)$। मानलो X है $n \times p$ का सांचा (Matrix) जिसका rank p और मानो A है $p \times k$ का सांचा (Matrix) जिसका rank k $A'\beta = \beta_0$ यथोचित सांख्यिकी परिक्षण करने के लिए परिक्षण निर्धारित की जाए। साथ ही इसका संवितरण खोजें। case k = 1 पर टिप्पणी करें।

   (ब) मानो $y_1 = \beta_1 - \beta_2 + e_1, y_2 = \beta_3 + e_2$ और $y_3 = \beta_1 + \beta_2 + e_3$ जहाँ e_1, e_2 और e_3 है $IN(0, \sigma^2)$ $2\beta_1 - \beta_2 = 0$ के परिक्षण के लिए परिक्षण निर्धारित करें।

5. (अ) दुतर्फा वर्गीकरण प्रतिरूप विचार करें।

   $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$ $\quad i = 1, 2, ...p,\quad$ j = 1, 2, ..., q

   विश्लेषण के लिए जरूरी मान्यता लिखें और $H: \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p$ और $H: \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_q$ hypotheses परिक्षण निर्धारित कीजिए।

(ब) मानो तीन ओवन पे प्रयोग किया है, अंतिम उत्पाद की मजबूती पता लगाने के लिए प्रत्येक को चार अलग-अलग तापमान पर रखा। अवलोकन को निम्न तालिका में दिए गए हैं। **ANOVA** प्राप्त करें और आपके निष्कर्ष लिखें :—

Oven / Temperature	1	2	3
1	3	4	3
2	6	6	8
3	3	3	5
4	4	3	7

F_α (3, 6) = 4.76 F_α (2, 6) = 5.14 and α = 0.05 ।

6. (अ) निर्वाह व्यय सूचकांक बनाने में आनेवाली निहित कठिनाईयों की चर्चा करें।
निर्वाह व्यय सूचकांक के लिए फिशर का सूत्र निर्धारित कीजिए।
परिपूर्णता दर्शाये कि (1) Time reversal test and (2) Factor reversal test.

(ब) निम्नलिखित विवरण के उपयोग से फिशर के मूल्य सूचकांक पता लगाइये और दर्शायें कि यह Time reversal test परिपूर्ण करता है —

Commodity	1999		2002	
	Quantity	Price	Quantity	Price
Rice	50	32	50	30
Barley	35	30	40	25
Maize	55	16	50	18

खंड C : सांख्यिकी निष्कर्ष

7. (अ) मानो $\{Y_i\}_1^{2n+1}$ स्वतंत्र और समान रुप से संवितरित यदृच्छिक चर वस्तुयें uniform ($\mu - 1$, μ +1) है।

दर्शायें कि नमूना मध्य $Y_{(n+1)}$ और $\overline{Y}_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} Y_i \Big/ (2n+1)$, नमूना औसत (consistent estimators) तर्कयुक्त आकलन है। कौनसा आकलन आप prefer करेंगे ? क्यों ?

(ब) मानो $X_1, X_2, ..., X_n$ स्वतंत्र और समान रूप से संवितरित यदृच्छिक चर वस्तुयें हैं जिसका exponential संवितरण है $f(x, \theta)$ जहाँ $f(x, \theta) = \dfrac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$; $x > 0$, $\theta > 0$.

सिद्ध कीजिए $f(x, \theta)$ का UMVUE यह $h(x|t)$ है।

X_1 का conditional pdf जहाँ T = t, जबकि $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$h(x \mid t) = \frac{(n-1)(t-x)^{n-2}}{t^{n-1}}; x < t$$
$$= 0 \qquad ; x > t.$$

8. (अ) परिभाषा कीजिए (*i*) Similar Test (*ii*) Neyman Structure Test.

सिद्ध कीजिए $\Phi(X)$ का प्रत्येक परिक्षण जिसकी Neyman संरचना है $\theta \in \Lambda$ के लिए similar test है। जहाँ $H_0 : \theta \in \Lambda$ विरूद्ध $H_1 : \theta \in \Omega - \Omega_0$ के परिक्षण में Λ सीमा है Ω_0 और $\Omega - \Omega_0$ की।

(ब) मानो $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ यदृच्छिक चर वस्तुयें नमूना समान संवितरण $U(0, \theta)$ से लिए हैं। परिक्षण द्वारा मालूम करें UMP size α test, परिक्षण के लिए—

(1) $H_0 : \theta \le \theta_0$ विरूद्ध $H_1 : \theta > \theta_0$

(2) $H_0 : \theta = \theta_0$ विरूद्ध $H_1 : \theta \ne \theta_0$ ।

9. (अ) Concordance (π_c) की संभावना और discordance (π_d) की संभावना की परिभाषा कीजिये।

$\tau = \pi_c - \pi_d$ का अनामिनता आकलन प्राप्त कीजिए।

(ब) फूलों के प्रदर्शन में परिक्षक पाँच प्रदर्शनों को उमदा देने के लिए सहमत हो गये और इन प्रदर्शनों को स्वेच्छन्दतासे arbitrarily from 1 to 5 क्रमांकित किया। तीन परिक्षकों ने प्रदर्शन की निम्नलिखित ranking (क्रम) देकर गुणानुसार व्यवस्था की।

Judge A	5	3	1	2	4
Judge B	3	1	5	4	2
Judge C	5	2	3	1	4

Kandall's नमूना tau गुणक T को तीन जोड़ी के क्रमगत से मालुम करें।

खंड D : Stochastic Processes

10. (अ) अगर $i \leftrightarrow j$ (i बात करता है j के साथ) i आवर्तक है तो सिद्ध कीजिए j भी (recurrent) आवर्तक है।

(ब) निम्नलिखित transition probability matrix को states of the Markov Chain से वर्गीकृत कीजिए—

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Markov Chain का अवधी और stationary संवितरण का पता लगाऐं।

11. (अ) Poisson प्रक्रिया में $(0, t)$ दौरान n घटनाओं हुई दर्शायें $(0, s)$ $s < t$ दौरान हुई घटनाओं की संभावना संवितरण binomial है जहाँ success की संभावना s/t है।

(ब) मानो X_t एक Markov प्रक्रिया है {1,2} पर है generator

$A = \begin{bmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}$ के साथ Kolmogorov का अग्रिम समीकरण लिखें और हल करें

transition संभावनाओं $p_{ij}(t)$ जहाँ $i, j = 1,2$ के लिए मालूम करो—

$P[X_t = 2 / X_0 = 1, X_{3t} = 1]$

12. (अ) समय श्रृंखला प्रतिरूप द्वारा निर्दिष्ट $y_t = y_{t-1} - 0.5\, y_{t-2} + e_t$ है। जहाँ e_t white noise प्रक्रिया है सांथ में प्रसरण σ^2 । प्रक्रिया stationary है क्या ? निश्चित करें साथ ही इस प्रक्रिया के लिए स्वरसहसंबंध ρ_1, ρ_2 निश्चित करें।

(ब) समय श्रृंखला Z_t ARIMA (1,d,0) प्रक्रिया d के कुछ मूल्य के लिए विश्वास से पालन करेगी समय श्रृंखला $Z_t(k)$ समय k के differentiate कर प्राप्त है और स्वसहसंबंध निम्नलिखित तक्ते में k के लिए दर्शाया है–

	k=0	k=1	k=2	k=3
r_1	1.00	1.00	0.83	–0.03
r_2	1.00	1.00	0.66	–0.12
r_3	1.00	1.00	0.54	–0.11
r_4	1.00	0.99	0.45	–0.01
r_5	1.00	0.99	0.37	–0.03
r_6	0.99	0.99	0.30	–0.12
r_7	0.99	0.98	0.27	0.03
r_8	0.99	0.98	0.24	0.03
r_9	0.99	0.97	0.19	0.03
r_{10}	0.99	0.97	0.13	–0.07

d का मूल्य निर्धारित कीजिए और parameter α का underlying AR(1) प्रक्रिया में मूल्य निर्धारित कीजिए।

खंड E (Multivariate Analysis)

13. (अ) मान लो X है $N_{p+q}(\mu, \Sigma)$ है मान लो $X = \left(X_p^{(1)}, X_q^{(2)}\right)'$ partitioned vector है। $X^{(1)}$ का marginal distribution और $X^{(1)}$ का सशर्त distribution निर्धारित कीजिए। दिया हुआ है $X^{(2)} = x^{(2)}$।

(ब) मानो X वितरित है $N_3(\mu, \Sigma)$ जहाँ—

$\mu' = (1, -1, 2)$ और $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ प्राप्त करें X_1 का सीमांत संवितरण और सशर्त संवितरण X_1 का दिया है ($X_2 = x_2, X_3 = x_3$)

14. (अ) समिष्ठ प्रमुख अंग (population principal components) की परिभाषा कीजिए। सहसंबंध गणक $\rho\ (Y_i, X_k)$ प्राप्त करें जहाँ Y_i दर्शाता है ith प्रमुख अंग है और X_k दर्शाता है k^{th} element of vector $X = (X_1, ..., X_p)'$

(ब) पता लगाइये पहिला प्रमुख घटक और कुल समिष्ठ प्रसरण का अनुपात, जो की स्पष्ट किया है जब सह प्रसरण सारमी है।

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\rho & 0 \\ \sigma^2\rho & \sigma^2 & \sigma^2\rho \\ 0 & \sigma^2\rho & \sigma^2 \end{pmatrix}, \frac{-1}{\sqrt{2}} < \rho < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(Hint : σ^2 is one eigenvalue of Σ)

15. (अ) (1) Mahalanobis अंतर Δ^2 की परिभाषा कीजिए, दो सामान्य समिष्ठ बीज के अंतर का गणक।

(2) माना $X \sim N_2(\mu_i, \Sigma), \mathrm{i} = 1, 2$ जहाँ $\mu_1 = (2 \quad 2)'$ और $\mu_2 = (0 \quad 0)', \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

गणना कीजिए Mahalanobis अंतर Δ^2, और प्राप्त करें linear discriminant function ।

(ब) समूह विश्लेषण क्या है ? (Cluster Analysis) निम्नलिखित distance सारमी के कुछ विषय (items) के उपयोग कर––

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 9 & 7 & 3 \\ 6 & 9 & 0 & 10 & 5 \\ 1 & 7 & 10 & 0 & 8 \\ 6 & 3 & 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

complete linkage hierarchical पद्धती के उपयोग से विषय (item) के समूह बनाई dendrogram बनाईये ।

खंड F : संख्यात्मक विश्लेषक और बुनियादी संगणक तकनीक

16. (अ) Newton-Raphson के पद्धतीनुसार अनुकूलनalgebraic function unconstrained optimization का वर्णन करें।

क्या हर वक्त यह पद्धती optimum समाधान दे पाती है ? इस पद्धती के मान्यताओं को लिखें।

(ब) द्विभाजन पद्धती (bisection method) के अनुसार एक समालोचनात्मक तुलना कीजिए। उदाहरण देकर स्पष्ट करें।

17. (अ) Numerical Integration की closed quadrature पद्धती का वर्णन करें।

(ब) ख्यात्मक एकीकरण के trapezoidal और Simpson's $1/3^{rd}$ नियम को निर्धारित कीजिए और दोनों पद्धती के बीच यथार्थता की तुलना करें तथा उदाहरण देकर स्पष्ट करें।

18. (अ) किसी भी दो sorting algorithms का वर्णन कीजिए।

(ब) Bubble sort algorithm के अच्छे से अच्छे और बुरे से बुरे time complexities पर चर्चा करें तथा उदाहरण देकर स्पष्ट करें।

Instructions.—(1) The candidate may attempt *any five* questions selecting not more than two from any section. In case the candidate answers more than five questions, only the first five questions in the chronological order of question numbers answered will be evaluated and the rest of the answers ignored.

(2) Each question carries 20 marks.

(3) Answers must be written in **English** or in **Hindi**.

(4) QUESTIONS FROM EACH SECTION SHOULD BE ANSWERED ON SEPARATE ANSWER-BOOK/SUPPLEMENTS.

(5) Answer to each question must begin on a fresh page and the question number must be written on the top.

(6) On the answer-book, Name, Roll Number etc. are to be written in the space provided for them. Name or Roll Number should not be written on the supplement.

(7) Candidates should use their own pen, pencil, eraser and pencil-sharpener and footrule.

(8) No reference books, Text books, Mathematical tables, Engineering tables or other instruments will be supplied or allowed to be used or even allowed to be kept with the candidates. Violation of this rule may lead to penalties. use of nonprogrammable electronic calculator is permitted.

(9) ALL ROUGH WORK MUST BE DONE IN THE LAST THREE OR FOUR PAGES OF THE ANSWER BOOKLET; ADDITIONAL BOOKLETS WILL BE PROVIDED ON DEMAND, WHICH SHOULD BE ATTACHED TO THE ANSWER BOOKLET BEFORE RETURNING.

Paper II : Descriptive type on Statistics

A : Probability and Sampling

1. (*a*) State and prove Basic inequality.

   (*b*) Show that $P(0 < X < 6) > \frac{2}{3}$ if X has probability density function $f(x) = \frac{e^{-x}x^2}{2}, x > 0$ and = 0, otherwise.

2. (*a*) Describe linear systematic sampling. If N = nk and $Y_i = i$ for i = 1, 2, ..., N. Derive variance of $\overline{Y}_{sys}$. Show that in this case systematic sampling is more precise than simple random sampling.

   (*b*) In nurseries that produce young trees for sale, it is advisable to estimate, in early spring, how many healthy young trees are likely to be on hand. A study of sampling methods for the estimation of total number of seedlings was undertaken. The data that follow were obtained from a bed of silver maple seedlings 1 ft. wide and 400 ft. long. The sampling unit was 1 ft. of the length of bed, so that N = 400. By complete enumeration of the bed it was found that $\overline{Y}$ = 1.96, S^2 = 80, these being the true population values. With simple random sampling how many units must be taken to estimate $\overline{Y}$ within 10% of the true value with a confidence coefficient of 95%. ($Z\alpha$ = 1.96).

3. (*a*) Define ratio estimate. Show that it is biased. Explain how to obtain unbiased ratio type estimator.

   (*b*) A population consists of 5 units, with response variable Y taking values (2,3,5,6,8) and auxiliary variable X taking values (1,2,3,4,5). Consider all simple random samples without replacement of size 3 and obtain Bias of $\hat{\overline{Y}}_R$ [$\hat{\overline{Y}}_R$ denotes the ratio estimate of population mean.]

B : Linear Models and Economics Statistics

4. (*a*) Consider the usual model $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{e}$ where $\underline{e} \sim N(0, \sigma^2 I_n)$. Suppose X is a $n \times p$ matrix of rank p and let A be a $p \times k$ matrix of rank k. Derive the appropriate test statistic to test $A'\beta = \beta_0$. Also find its distribution. Comment on the case k = 1.

   (*b*) Let $y_1 = \beta_1 - \beta_2 + e_1, y_2 = \beta_3 + e_2$ and $y_3 = \beta_1 + \beta_2 + e_3$ where e_1, e_2 and e_3 are $IN(0, \sigma^2)$. Derive a test to test the $2\beta_1 - \beta_2 = 0$.

5. (*a*) Consider the two-way classification model—

   $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$ $\quad i = 1, 2, ...p, \quad$ j = 1, 2, ..., q

   State the assumptions required for the analysis and dervie the tests for the hypotheses $H: \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p$ and $H: \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_q$.

(*b*) Assume that an experiment was run on three ovens, each at four temperatures to ascertain the strength of the final product. The observations are given in the following table. Obtain ANOVA and write your conclusions.

Temperature \ Oven	1	2	3
1	3	4	3
2	6	6	8
3	3	3	5
4	4	3	7

F_α (3, 6) = 4.76 F_α (2, 6) = 5.14 and α = 0.05.

6. (*a*) Discuss different problems that arise in the construction of cost of living index numbers.
Derive Fisher's formula for cost of living index numbers. Show that it satisfies (1) Time reversal test and (2) Factor reversal test.

(*b*) Using the data given below find Fisher's Price Index Numbers and show that it satisfies time reversal test—

Commodity	1999		2002	
	Quantity	Price	Quantity	Price
Rice	50	32	50	30
Barley	35	30	40	25
Maize	55	16	50	18

C : Statistical Inference

7. (*a*) Let $\{Y_i\}_1^{2n+1}$ are independent identically distributed (iid) rvs with uniform $(\mu - 1, \mu + 1)$. Show that $Y_{(n+1)}$, the sample median and $\overline{Y}_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} Y_i \Big/ (2n+1)$ the sample mean are consistent estimators. Which estimators will you prefer ? Why ?

(*b*) Let $X_1 = X_2$ ......, X_n be iid rvs with exponential distribution, $f(x, \theta)$, where $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$; $x > 0$, $\theta > 0$. Prove that the UMVUE of $f(x, \theta)$ is given by $h(x|t)$, the conditional pdf of X_1 given T = t, where $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$,

$$h(x \mid t) = \frac{(n-1)(t-x)^{n-2}}{t^{n-1}} ; x < t$$
$$= 0 \qquad ; x > t.$$

8. (*a*) Define (*i*) Similar Test (*ii*) Neyman Structure Test. Prove that every test $\Phi(X)$ having Neyman structure for $\theta \in \Lambda$ is a similar test where Λ is a boundary of Ω_0 and $\Omega - \Omega_0$ for testing $H_0 : \theta \in \Lambda$ against $H_1 : \theta \in \Omega - \Omega_0$.

(*b*) Let $X_1 = X_2$,...... X_n be a random sample drawn from uniform distribution $U(0, \theta)$. Find out a UMP size α test for testing—

(1) $H_0 : \theta \le \theta_0$ against $H_1 : \theta > \theta_0$ (2) $H_0 : \theta = \theta_0$ against $H_1 : \theta \ne \theta_0$.

9. (*a*) Define the probability of concordance (π_c) and probability of discordance (π_d). Obtain an unbiased estimate of $\tau = \pi_c - \pi_d$.

(*b*) In a flower show the judges agreed that five exhibits were outstanding and these were numbered arbitrarily from 1 to 5. Three judges each arranged these five exhibits in order of merits, giving the following rankings—

Judge A	5	3	1	2	4
Judge B	3	1	5	4	2
Judge C	5	2	3	1	4

Compute Kandall's sample tau coefficient T from the three possible pairs of rankings.

D : Stochastic Processes

10. (*a*) If $i \leftrightarrow j$ (i communicates with j) and i is recurrent then show that j is also recurrent.

(*b*) Classify the states of the Markov Chain with following transition probability matrix—

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Find the period of the Markov Chain and the stationary distribution.

11. (*a*) In a Poisson Process n events have occurred during (0, *t*). Show that probability distribution of the number of events that have occurred during (0, *s*) s < t is binomial with success probability s/t.

(*b*) Let X_t, be a Markov Process on {1,2} with generator

$$A = \begin{bmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}$$

Write down the Kolmogorov forward equation and solve them for transition probabilities $p_{ij}(t)$ for i, j = 1, 2. Find $P[X_t = 2 / X_0 = 1, X_{3t} = 1]$.

12. (*a*) A time series model is specified by $y_t = y_{t-1} - 0.5\, y_{t-2} + e_t$ where e_t is white noise process with variance σ^2. Determine whether the process is stationary. Also derive autocorrelation ρ_1, ρ_2 for this process.

(*b*) The time series Z_t is believed to follow a ARIMA (1,d,0) process for some value of d. The time series Z_t *(k)* obtained by differentiating k times and sample autocorrelation are shown in the table below for values of k—

	k=0	k=1	k=2	k=3
r_1	1.00	1.00	0.83	–0.03
r_2	1.00	1.00	0.66	–0.12
r_3	1.00	1.00	0.54	–0.11
r_4	1.00	0.99	0.45	–0.01
r_5	1.00	0.99	0.37	–0.03
r_6	0.99	0.99	0.30	–0.12
r_7	0.99	0.98	0.27	0.03
r_8	0.99	0.98	0.24	0.03
r_9	0.99	0.97	0.19	0.03
r_{10}	0.99	0.97	0.13	–0.07

Determine values for d and the parameter α in the underlying AR(1) process.

E : Multivariate Analysis

13. (*a*) Suppose X be N_{p+q} (μ, Σ). Suppose $X = \left(X_p^{(1)}, X_q^{(2)}\right)'$ be a partitioned vector. Derive the marginal distribution of $X^{(1)}$ and conditional distribution of $X^{(1)}$ given $X^{(2)} = x^{(2)}$.

(*b*) Let X be distributed as N_3 (μ, Σ) where $\mu' = (1, -1, 2)$ and $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Obtain the marginal distribution of X_1 and conditional distribution of X_1 given that $(X_2 = x_2, X_3 = x_3)$.

14. (*a*) Define population principal components. Obtain the correlation coefficient $\rho\ (Y_i, X_k)$, where Y_i denotes the ith principal component and X_k denotes kth element of vector $X = (X_1, \ldots\ldots, X_p)'$.

(*b*) Find the first principal component and the proportion of the total population variance explained by it when the covariance matrix is—

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\rho & 0 \\ \sigma^2\rho & \sigma^2 & \sigma^2\rho \\ 0 & \sigma^2\rho & \sigma^2 \end{pmatrix}, \frac{-1}{\sqrt{2}} < \rho < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(Hint : σ^2 is one eigenvalue of Σ)

15. (*a*) (*i*) Define Mahalanobis distance Δ^2, a measure of the distance between the two normal populations.

(*ii*) Suppose $X \sim N_2(\mu_i, \Sigma)$, i = 1, 2 where $\mu_1 = (2 \quad 2)'$, $\mu_2 = (0 \quad 0)'$ and $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Compute the Mahalanobis distance Δ^2 and obtain the linear discriminant function.

(*b*) What is cluster analysis ? Using the distance matrix of five items given below—

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 9 & 7 & 3 \\ 6 & 9 & 0 & 10 & 5 \\ 1 & 7 & 10 & 0 & 8 \\ 6 & 3 & 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Cluster the items using complete linkage hierarchical method. Draw the dendrogram.

F : Numerical Analysis and Basic Computer Techniques

16. (*a*) Describe the Newton-Raphson method for unconstrained optimization of an algebraic function. Does this method always find an optimal solution ? State the assumptions of this method.

(*b*) Make a critical comparison of the method with the bisection method. Illustrate your answer with an example.

17. (*a*) Describe the closed quadrature method of numerical integration.

(*b*) Derive the trapezoidal and Simpson's 1/3rd rules of numerical integration and make a comparison between these methods in terms of their accuracy. Give an example to illustrate your answer.

18. (*a*) Describe any two sorting algorithms.

(*b*) Discuss the best-case and the worst-case time complexities of the bubble sort algorithm. Illustrate your answer with an example.