Higher Secondary Half Yearly Examination - 2017

Part - III

MATHEMATICS (Science)

HSE II

Maximum : 80 Scores
Time: 2½ hrs
Cool off time : 15 Minutes

General Instructions to candidates:

- There is a 'cool off time' of 15 minutes in addition to the writing time of 2½ hrs.
- Read the questions carefully before answering
- When you select a question, all the sub-questions must be answered from the same question itself.
- Calculations, figures and graphs should be shown in the answer sheet itself.
- Malayalam version of the questions is also provided.
- Give equations wherever necessary
- Non programmable calculators are allowed in the Examination Hall.

പൊതുനിർദ്ദേശങ്ങൾ

- നിർദ്ദിഷ്ട സമയത്തിന് പുറമെ 15 മിനിട്ട് 'കൂൾ ഓഫ് ടൈം' ഉണ്ടായിരിക്കും.
- ഉത്തരങ്ങൾ എഴുതുന്നതിന് മുമ്പ് ചോദ്യങ്ങൾ ശ്രദ്ധാപൂർവം വായിക്കണം.
- ഒരു ചോദ്യനമ്പർ ഉത്തരമെഴുതാൻ തെരഞ്ഞെടുത്ത് കഴിഞ്ഞാൽ ഉപചോദ്യങ്ങളും അതേ ചോദ്യ നമ്പറിൽ നിന്ന് തന്നെ തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതാണ്.
- കണക്കുകൂട്ടലുകൾ, ചിത്രങ്ങൾ, ഗ്രാഫുകൾ, എന്നിവ ഉത്തരപ്പേപ്പറിൽത്തന്നെ ഉണ്ടായിരിക്കണം.
- ചോദ്യങ്ങൾ മലയാളത്തിലും നൽകിയിട്ടുണ്ട്.
- ആവശ്യമുള്ള സ്ഥലത്ത് സമവാക്യങ്ങൾ കൊടുക്കണം.
- പ്രോഗ്രാമുകൾ ചെയ്യാനാകാത്ത കാൽക്കുലേറ്ററുകൾ പരീക്ഷാഹാളിൽ ഉപയോഗിക്കാം.

Questions 1 to 7 carry 3 marks each. Answer any six questions.

1. $*$ be a binary operation on $N \times N$, defined as $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$
   a) Show that $*$ is commutative (1)
   b) Find the identity element of $*$ if any (1)
   c) Write an element of $N \times N$ which has an inverse (1)

2. Show that $\sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{77}{36}\right)$ (3)

1 മുതൽ 7 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് 3 മാർക്ക് വീതമാണ്. ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും 6 എണ്ണത്തിന് ഉത്തരമെഴുതുക.

1. $N \times N$ ൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ബൈനറി ഓപ്പറേഷൻ $*$ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു
   $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$
   a) $*$ കമ്മ്യൂട്ടേറ്റീവ് ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക (1)
   b) ഈ ഓപ്പറേഷന് ഐഡന്റിറ്റി എലിമെന്റ് ഉണ്ടെങ്കിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക. (1)
   c) $N \times N$ ൽ ഇൻവേഴ്സ് ഉള്ള ഒരു എലിമെന്റ് എഴുതുക. (1)

2. $\sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{77}{36}\right)$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക. (3)

3. a) Construct the 3 × 3 matrix $A = [a_{ij}]$ where $a_{ij} = 2(i-j)$ (2)

b) Show that the matrix A is skew symmetric (1)

4. Using the properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$ (3)

5. The length of a rectangle is decreasing at the rate of 5 cm/min and the width is increasing at the rate of 4 cm/min. When length is 8 cm and width is 6 cm, find the rate of change of its area. (3)

6. Consider the vector $\vec{p} = 2i - j + k$. Find two vectors $\vec{q}$ and $\vec{r}$ such that $\vec{p}$, $\vec{q}$ and $\vec{r}$ are mutually perpendicular. (3)

7. If $\bar{a} = 3i + j + 2k$

a) Find the magnitude of $\bar{a}$ (1)

b) If the projection of $\bar{a}$ on another vector $\bar{b}$ is $\sqrt{14}$, which among the following could be '$\bar{b}$'? (1)

i) $i + j + k$ ii) $6i + 2j + 4k$

iii) $3i - j + 2k$ iv) $2i + 3j + k$

c) If $\bar{a}$ makes an angle 60° with a vector $\bar{c}$, find the projection of $\bar{a}$ on $\bar{c}$ (1)

(6 × 3 = 18)

Questions 8 to 17 carry 4 marks each. Answer any **eight** questions.

8. a) If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, find A^{-1} (3)

b) If $AB = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, find the matrix B (1)

3. a) $a_{ij} = 2(i-j)$ ആയ ഒരു 3 × 3 മാട്രിക്സ് $A = [a_{ij}]$ കണ്ടുപിടിക്കുക. (2)

b) മാട്രിക്സ് A ഒരു സ്ക്യൂ സിമാട്രിക് മാട്രിക്സ് ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക. (1)

4. ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ സവിശേഷതകൾ ഉപയോഗിച്ച്

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക. (3)

5. ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം 5 cm/min എന്ന തോതിൽ കുറയുകയും വീതി 4 cm/min എന്ന തോതിൽ കൂടുകയും ചെയ്യുന്നു. നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററും, വീതി 6 സെന്റിമീറ്ററും ആയിരിക്കുന്ന സമയത്ത് ഈ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് മാറുന്നതിന്റെ നിരക്ക് കണ്ടുപിടിക്കുക. (3)

6. $\vec{p} = 2i - j + k$ ആണെങ്കിൽ $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ എന്നിവ പരസ്പരം ലംബമാകുന്നവിധത്തിൽ $\vec{q}$, $\vec{r}$ എന്നീ രണ്ടു വെക്ടറുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. (3)

7. $\bar{a} = 3i + j + 2k$ ആയാൽ

a) $\bar{a}$ യുടെ മാഗ്നിറ്റ്യൂഡ് കാണുക (1)

b) $\bar{a}$ എന്ന വെക്ടറിന് മറ്റൊരു വെക്ടർ $\bar{b}$ യിൽ ഉള്ള പ്രൊജക്ഷൻ $\sqrt{14}$ ആണെങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവയിൽ $\bar{b}$ ആകാൻ സാധ്യതയുള്ളത് ഏതാണ്? (1)

i) $i + j + k$ ii) $6i + 2j + 4k$

iii) $3i - j + 2k$ iv) $2i + 3j + k$

c) $\bar{a}$ മറ്റൊരു വെക്ടർ $\bar{c}$ യുമായി 60° കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\bar{a}$ ക്ക് $\bar{c}$ യിലുള്ള പ്രൊജക്ഷൻ കണ്ടുപിടിക്കുക. (1)

(6 × 3 = 18)

8 മുതൽ 17 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് 4 മാർക്ക് വീതമാണ്. ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും **8** എണ്ണത്തിന് ഉത്തരമെഴുതുക.

8. a) If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ ആയാൽ A^{-1} കണ്ടുപിടിക്കുക. (3)

b) If $AB = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ആയാൽ മാട്രിക്സ് B കണ്ടുപിടിക്കുക. (1)

9. If $f: R \to R$ is a function given by $f(x) = 3x - 2$

a) Show that f is one-one (1)

b) Find $fof\ (x)$ (1)

c) Find the inverse of f if exists (2)

10. Let $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le c \\ \sin x, & c < x \le \pi \end{cases}$

a) Find the value of c if f is continuous in $[0, \pi]$ (2)

b) Show that f is not differentiable at the point c (2)

11. a) Find $\frac{dy}{dx}$ if

$x = 2 \sin \theta$

$y = 3 \cos \theta$ (3)

b) Which among the following functions is differentiable on R? (1)

i) $|\sin x|$ ii) $|\cos x|$ iii) $\cos |x|$ iv) $\sin |x|$

12. Using differentials, find the approximate value of $(63)^{1/3}$ (4)

13. a) Find the points on the curve $y = x^3 - 10x + 8$ at which the tangent is parallel to the line $y = 2x + 1$ (3)

b) Is the given line $y = 2x + 1$ tangent to the curve? Why? (1)

14. Consider the points $A\ (2, 1, 1)$ and $B\ (4, 2, 3)$

a) Find the vector $\overrightarrow{AB}$ (1)

b) Find the direction cosines of $\overrightarrow{AB}$ (2)

c) Find the angle made by $\overrightarrow{AB}$ with the positive direction of X-axis. (1)

9. $f: R \to R, f(x) = 3x - 2$ ഒരു ഫംഗ്ഷനാണ്

a) f വൺ-വൺ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക. (1)

b) $fof\ (x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക (1)

c) f ന് ഇൻവേഴ്സ് ഉണ്ടെങ്കിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക. (2)

10. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le c \\ \sin x, & c < x \le \pi \end{cases}$

a) f എന്ന ഫംഗ്ഷൻ $[0, \pi]$ ൽ കണ്ടിന്യുവസ് ആണെങ്കിൽ c യുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക. (2)

b) c എന്ന ബിന്ദുവിൽ f ഡിഫറൻഷ്യബിൾ അല്ലെന്ന് തെളിയിക്കുക. (2)

11. a) $x = 2 \sin \theta, y = 3 \cos \theta$ ആയാൽ $\frac{dy}{dx}$ കണ്ടുപിടിക്കുക (3)

b) താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ഏത് ഫംഗ്ഷനാണ് R ൽ ഡിഫറൻഷ്യബിൾ ആയിട്ടുള്ളത്? (1)

i) $|\sin x|$ ii) $|\cos x|$ iii) $\cos |x|$ iv) $\sin |x|$

12. ഡിഫറൻഷ്യൽസ് ഉപയോഗിച്ച് $(63)^{1/3}$ യുടെ ഏകദേശ വില കണക്കാക്കുക. (4)

13. a) $y = x^3 - 10x + 8$ എന്ന കർവിൽ, $y = 2x + 1$ എന്ന വരക്ക് സമാന്തരമായ തൊടുവര വരക്കാവുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടെത്തുക. (3)

b) $y = 2x + 1$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്ന വര കർവിന് തൊടുവര ആണോ? എന്തുകൊണ്ട്? (i)

14. $A\ (2, 1, 1), B\ (4, 2, 3)$ എന്നി ബിന്ദുക്കൾ പരിഗണിക്കുക.

a) $\overrightarrow{AB}$ കണ്ടുപിടിക്കുക (1)

b) $\overrightarrow{AB}$ യുടെ ഡയറക്ഷൻ കൊസൈൻസ് കണ്ടുപിടിക്കുക (2)

c) X-അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശയുമായി $\overrightarrow{AB}$ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് കണക്കാക്കുക. (1)

15. Consider the lines
$\bar{r} = (i + 2j - 2k) + \lambda(i + 2j)$ and
$\bar{r} = (i + 2j - 2k) + \mu(2j - k)$

a) Find the angle between the lines. (2)

b) Find a vector perpendicular to both the lines. (1)

c) Find the equation of the line passing through the point of intersection of lines and perpendicular to both the lines. (1)

16. Consider the line $\bar{r} = (2i - j + k) + \lambda(i + 2j + 3k)$

a) Find the Cartesian equation of the line. (1)

b) Find the vector equation of the line passing through A (1, 0, 2) and parallel to the above line. (1)

c) Write two points on the line obtained in (b) which are equidistant from A. (2)

17. Form the differential equation of the family of circles touching the X-axis at origin. (4)

(8 × 4 = 32)

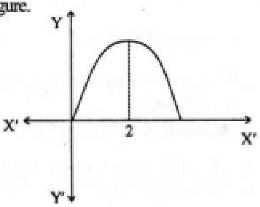
Questions 18 to 24 carry 6 marks each. Answer any **five** questions.

18. If $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$ is a real function

a) Find the intervals in which the function is increasing or decreasing. (3)

b) Find the points of local maxima or local minima of $f(x)$. (2)

c) Graph of a function is given in the following figure.



15. $\bar{r} = (i + 2j - 2k) + \lambda(i + 2j)$,
$\bar{r} = (i + 2j - 2k) + \mu(2j - k)$
എന്നീ രണ്ട് വരകൾ പരിഗണിക്കുക.

a) വരകൾക്കിടയിലെ കോണളവ് കണക്കാക്കുക. (2)

b) രണ്ടു വരകൾക്കും ലംബമായ ഒരു വെക്ടർ കണ്ടുപിടിക്കുക (1)

c) രണ്ടു വരകളുടെയും സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും രണ്ടു വരകൾക്കും ലംബമായതുമായ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക. (1)

16. $\bar{r} = (2i - j + k) + \lambda(i + 2j + 3k)$ എന്ന വര കാണുക.

a) വരയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം എഴുതുക. (1)

b) A (1, 0, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും മേൽപ്പറഞ്ഞ വരക്ക് സമാന്തരമായതുമായ വരയുടെ വെക്ടർ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക. (1)

c) (b) പാർട്ടിൽ കണ്ടുപിടിച്ച വരയിൽ, A യിൽനിന്നും തുല്യ അകലത്തിലുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിച്ച് എഴുതുക. (2)

17. X-അക്ഷത്തെ ഒറിജിനിൽ സ്പർശിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഡിഫറൻഷ്യൽ ഇക്വേഷൻ കണ്ടുപിടിക്കുക. (4)

(8 × 4 = 32)

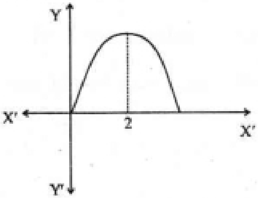
18 മുതൽ 24 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് 6 മാർക്ക് വീതമാണ്. ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും 5 എണ്ണത്തിന് ഉത്തരമെഴുതുക.

18. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$ ഒരു റിയൽ ഫംഗ്ഷനാണ്

a) $f(x)$ ഇൻക്രീസിംഗ് അല്ലെങ്കിൽ ഡിക്രീസിംഗ് ആകുന്ന ഇന്റർവെല്ലുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. (3)

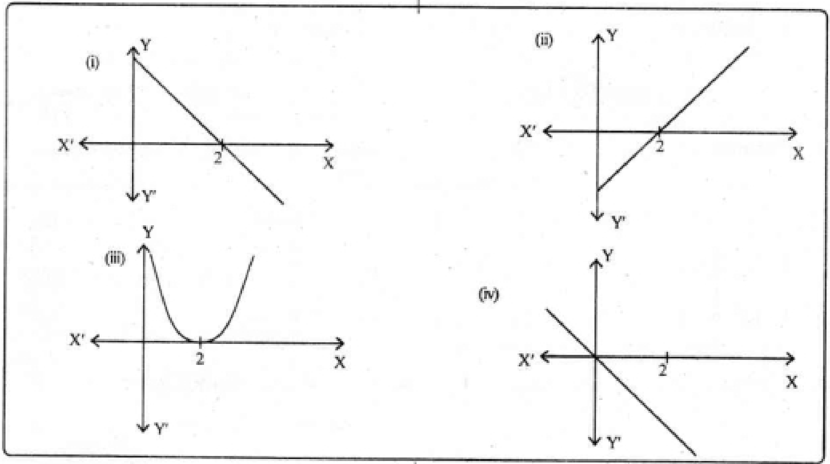
b) $f(x)$ ന്റെ ലോക്കൽ മാക്സിമ അല്ലെങ്കിൽ ലോക്കൽ മിനിമ ആയ ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. (2)

c) ഒരു ഫംഗ്ഷന്റെ ഗ്രാഫ് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

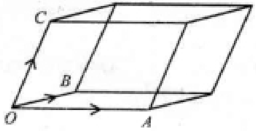


Which among the following represents the graph of its derivative? (1)

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ഏത് ഗ്രാഫാണ് ഫംഗ്ഷന്റെ ഡെറിവേറ്റീവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് (1)



19.



$\overrightarrow{OA} = i + 2j + 3k$

$\overrightarrow{OB} = i - 2j + 4k$

$\overrightarrow{OC} = 2i + 3j + k$

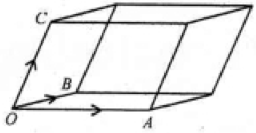
are adjacent sides of parallelopiped

a) Find the base area of the parallelopiped (base is determined by $\overrightarrow{OA}$ and $\overrightarrow{OB}$) (3)

b) Find the volume of the parallelopiped. (2)

c) Find the height of the parallelopiped. (1)

19.



$\overrightarrow{OA} = i + 2j + 3k$

$\overrightarrow{OB} = i - 2j + 4k$

$\overrightarrow{OC} = 2i + 3j + k$

എന്നിവ ഒരു പാരലെലോപിപ്പഡിന്റെ അടുത്തടുത്തുള്ള വശങ്ങളാണ് എങ്കിൽ

a) പാരലെലോപ്പിപ്പഡിന്റെ പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക. (പാദം നിർണിയിക്കുന്ന വശങ്ങൾ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ഇവയാണ്) (3)

b) പാരലെലോപിപ്പഡിന്റെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുക. (2)

c) പാരലെലോപിപ്പഡിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കുക. (1)

20. a) Find the equation of the line passing through the points (2, 1, 0) and (3, 2, −1) (2)

b) Find the shortest distance of the above line from the line

$\overline{r} = (i - j + 2k) + \lambda\,(2i + j - 3k)$ (4)

21. Find the following integrals

a) $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}\, dx$ (2)

b) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$ (2)

c) $\int e^x \sin x \,.\, dx$ (2)

22. a) Evaluate $\int_0^2 x^2 dx$ as the limit of a sum. (4)

b) Hence evaluate $\int_{-2}^{2} x^2 dx$ (1)

c) If $\int_0^2 f(x)\, dx = 5$ and $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = 0$,

then $\int_{-2}^{0} f(x)\, dx =$ .... (1)

23. Consider the differential equation

$(x - y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$

a) Show that it is a homogeneous differential equation. (1)

b) Solve the above differential equation. (5)

24. a) Find the area bounded by the curve $y = \sin x$ with X-axis, between $x = 0$ and $x = 2\pi$ (2)

b) Find the area of the region bounded by the curve $y = x^2$ and $y = |x|$ (4)

(5 × 6 = 30)

20. a) (2, 1, 0), (3, 2, −1) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക. (2)

b) മേൽവരക്ക്

$\overline{r} = (i - j + 2k) + \lambda\,(2i + j - 3k)$

എന്ന വരയുമായുള്ള കുറഞ്ഞ അകലം കണക്കാക്കുക. (4)

21. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഇന്റഗ്രൽസ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

a) $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}\, dx$ (2)

b) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$ (2)

c) $\int e^x \sin x \,.\, dx$ (2)

22. a) $\int_0^2 x^2 dx$ ന്റെ വില ഒരു തുകയുടെ ലിമിറ്റ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുക. (4)

b) ഇത് ഉപയോഗിച്ച് $\int_{-2}^{2} x^2 dx$ ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക. (1)

c) $\int_0^2 f(x)\, dx = 5$, $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = 0$, ആയാൽ

$\int_{-2}^{0} f(x)\, dx =$ .... (1)

23. $(x - y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ എന്ന ഡിഫറൻഷ്യൽ ഇക്വേഷൻ പരിഗണിക്കുക.

a) ഇതൊരു ഹോമോജീനിയസ് ഡിഫറൻഷ്യൽ ഇക്വേഷൻ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക. (1)

b) ഈ ഡിഫറൻഷ്യൽ ഇക്വേഷൻ സോൾവ് ചെയ്യുക. (5)

24. a) $y = \sin x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് X അക്ഷവുമായി $x = 0$, $x = 2\pi$ എന്നിവക്കിടയിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക. (2)

b) $y = x^2$, $y = |x|$ എന്നീ ഗ്രാഫുകൾക്കിടയിലുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക. (4)

(5 × 6 = 30)