61

# Higher Secondary Half Yearly Examination - 2017

## Part - III

## MATHEMATICS (Commerce)

HSE II

**Maximum : 80 Scores**
**Time: 2½ hrs**
**Cool off time : 15 Minutes**

**General Instructions to candidates:**

- There is a 'cool off time' of 15 minutes in addition to the writing time of 2½ hrs.
- Read the questions carefully before answering
- When you select a question, all the sub-questions must be answered from the same question itself.
- Calculations, figures and graphs should be shown in the answer sheet itself.
- Malayalam version of the questions is also provided.
- Give equations wherever necessary
- Non programmable calculators are allowed in the Examination Hall.

**പൊതുനിർദ്ദേശങ്ങൾ**

- നിർദ്ദിഷ്ട സമയത്തിന് പുറമെ 15 മിനിട്ട് 'കൂൾ ഓഫ് ടൈം' ഉണ്ടായിരിക്കും.
- ഉത്തരങ്ങൾ എഴുതുന്നതിന് മുമ്പ് ചോദ്യങ്ങൾ ശ്രദ്ധാപൂർവം വായിക്കണം.
- ഒരു ചോദ്യനമ്പർ ഉത്തരമെഴുതാൻ തെരഞ്ഞെടുത്ത് കഴിഞ്ഞാൽ ഉപചോദ്യങ്ങളും അതേ ചോദ്യനമ്പരിൽ നിന്ന് തന്നെ തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതാണ്.
- കണക്കുകൂട്ടലുകൾ, ചിത്രങ്ങൾ, ഗ്രാഫുകൾ, എന്നിവ ഉത്തരപ്പേപ്പറിൽത്തന്നെ ഉണ്ടായിരിക്കണം.
- ചോദ്യങ്ങൾ മലയാളത്തിലും നൽകിയിട്ടുണ്ട്.
- ആവശ്യമുള്ള സ്ഥലത്ത് സമവാക്യങ്ങൾ കൊടുക്കണം.
- പ്രോഗ്രാമുകൾ ചെയ്യാനാകാത്ത കാൽക്കുലേറ്ററുകൾ പരീക്ഷാഹാളിൽ ഉപയോഗിക്കാം.

Questions 1 to 7 carry 3 marks each. Answer any **six** questions.

1. Let $*$ be a binary operation on $Q$, (set of rational numbers) defined by $a * b = \frac{ab}{4}$

   i) Show that $*$ is commutative and associative (2)

   ii) Find the identity element of $*$ on $Q$ if exists (1)

1 മുതൽ 7 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് 3 മാർക്ക് വീതമാണ്. ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും **6** എണ്ണത്തിന് ഉത്തരമെഴുതുക.

1. '$*$' എന്നത് ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ സെറ്റ് $Q$ വിലെ ഒരു ബൈനറി ഓപ്പറേഷനാണെന്ന് കരുതുക. $a * b = \frac{ab}{4}$ ആണെങ്കിൽ

   i) '$*$' കമ്മ്യൂട്ടേറ്റീവും അസോസിയേറ്റീവും ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക. (2)

   ii) '$*$' എന്ന ബൈനറി ഓപ്പറേഷന് ഐഡന്റിറ്റി എലമെന്റ് ഉണ്ടെങ്കിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക. (1)

2. If the matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 7x-1 \\ 5x+3 & 5 \end{bmatrix}$ is symmetric

i) Find $x$ (1)

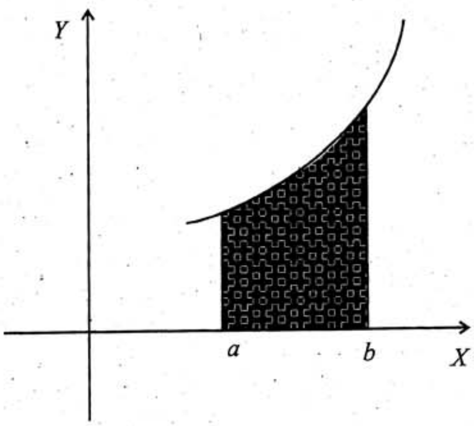
ii) Find $|A|$ (2)

3. i) Find the slope of the tangent to the curve $y = x^2 + 2x + 3$ at $x = 1$ (1)

ii) Find the equation of the above tangent. (2)

4. Find $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\, dx$ (3)

5. i) Area of the shaded region in the figure is (1)




a) $\int_a^b f(x)\, dx$ b) $\int_a^b f(y)\, dy$

c) $\int_a^b f(x)\, dy$ d) $\int_a^b f(y)\, dx$

ii) Find the area bounded by the curve $y = x^2$, between $x = 1$ and $x = 4$ (2)

6. Form a diffrential equation representing the family of lines passing through the origin. (3)

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & 7x-1 \\ 5x+3 & 5 \end{bmatrix}$ എന്നത് സിമെട്രിക് മാട്രിക്സ് ആണെങ്കിൽ

i) $x$ കണ്ടുപിടിക്കുക. (1)

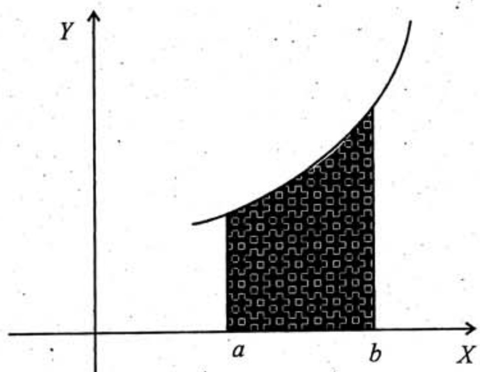
ii) $|A|$ കണ്ടുപിടിക്കുക. (2)

3. i) $y = x^2 + 2x + 3$ എന്ന കർവിൽ $x = 1$ ലെ തൊടുവരയുടെ സ്ലോപ്പ് കണക്കാക്കുക. (1)

ii) മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം കാണുക. (2)

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\, dx$ കണക്കാക്കുക. (3)

5. i) ചിത്രത്തിൽ ഷെയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്ത്? (1)




a) $\int_a^b f(x)\, dx$ b) $\int_a^b f(y)\, dy$

c) $\int_a^b f(x)\, dy$ d) $\int_a^b f(y)\, dx$

ii) $y = x^2$ എന്ന കർവിന്റെ $x = 1$ നും $x = 4$ നും ഇടയിലുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക. (2)

6. ഒറിജിനിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരകളുടെ ഡിഫറൻഷ്യൽ സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുക. (3)

7. Consider the vectors $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

   i) Find a vector perpendicular to both $\vec{a}$ and $\vec{b}$ (1)

   ii) Find a vector having magnitude 5 units perpendicular to both $\overline{a}$ and $\vec{b}$ (2)

(6 × 3 = 18)

Questions 8 to 17 carry 4 marks each. Answer any **eight** questions.

8. i) If $f(x) = \sin x$, then two of the following functions are invertible, identify them (2)

   a) $f: [0, \pi] \to [-1, 1]$

   b) $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, 1)$

   c) $f: \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to [-1, 1]$

   d) $f: R \to R$

   ii) Evaluate $\sin^{-1} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ (2)

9. Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ as the sum of a symmetric and a skew symmetric mxtrix (4)

10. i) If $\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 4 & b & 0 \\ 1 & -3 & c \end{vmatrix} = 57$, then $\begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ 3 & b & -3 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} = .....$ (1)

    ii) Prove using properties of dererminants

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - x^3)^2 \quad (3)$$

11. Examine the continuity of the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$ at the point, $x = 1$ (4)

7. $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ എന്നീ വെക്ടറുകൾ പരിഗണിക്കുക.

   i) $\vec{a}$ ക്കും $\vec{b}$ ക്കും ലംബമായിട്ടുള്ള ഒരു വെക്ടർ കാണുക. (1)

   ii) $\vec{a}$ ക്കും $\vec{b}$ ക്കും ലംബമായതും 5 യൂണിറ്റ് മാഗ്നിട്യൂഡുള്ളതുമായ ഒരു വെക്ടർ കാണുക. (2)

(6 × 3 = 18)

8 മുതൽ 17 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് 4 മാർക്ക് വീതമാണ്. ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും **8** എണ്ണത്തിന് ഉത്തരമെഴുതുക.

8. i) $f(x) = \sin x$. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ രണ്ട് ഫങ്ഷനുകൾ ഇൻവെർട്ടിബിളാണ്. അവ തെരഞ്ഞെടുക്കുക. (2)

   a) $f: [0, \pi] \to [-1, 1]$

   b) $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, 1)$

   c) $f: \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to [-1, 1]$

   d) $f: R \to R$

   ii) $\sin^{-1} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ യുടെ വില കാണുക. (2)

9. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിനെ ഒരു സിമെട്രിക്ക് മാട്രിക്സിന്റെയും സ്ക്യു സിമെട്രിക്ക് മാട്രിക്സിന്റെയും തുകയായി എഴുതുക. (4)

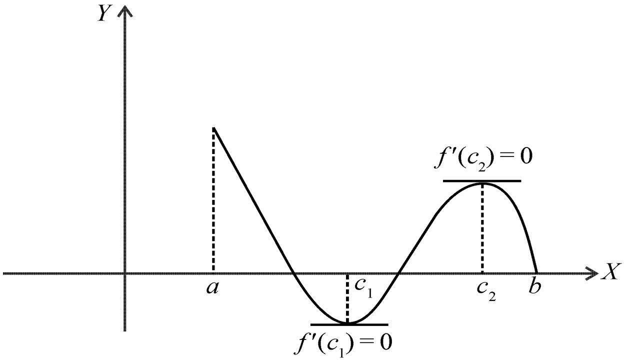
10. i) If $\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 4 & b & 0 \\ 1 & -3 & c \end{vmatrix} = 57$ ആയാൽ $\begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ 3 & b & -3 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} = .....$ (1)

    ii) ഡിറ്റർമിനെന്റ്സിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - x^3)^2 \quad (3)$$

11. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ എന്ന ഫങ്ഷൻ $x = 1$ ൽ കണ്ടിന്യൂസ് ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. (4)

12. i) Consider the graph of a function $y = f(x)$ in the interval $[a, b]$, as given below




Find the intervals in which the function is strictly increasing and strictily decreasing (2)

ii) Find the intervals in which the function $f(x) = 2x^2 - 4x$ is

a) strictly increasing

b) strictly decresing (2)

13. i) $\int x \, dx = .....$ (1)

ii) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx$ (3)

14. i) Find the area bounded by the curve $y = \sin x$ between $x = 0$ and $x = \frac{\pi}{2}$ (3)

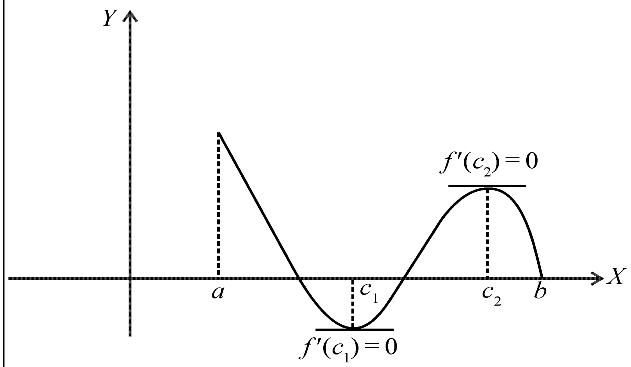
ii) Hence find the area bounded by the curve $y = \sin^{-1} x$; between $y = 0$ and $y = \frac{\pi}{2}$ (1)

15. Find the curve passing through the point $(1, -1)$ whose differential equation is $xy \frac{dy}{dx} = (x + 2)(y + 2)$ (4)

16. i) Find the position vector of the point $P$ which divides the line joining the points $A(1, 2, -1)$ and $B(-1, 1, 1)$ internally in the ratio 2 : 1 (2)

ii) Find the vector $\overrightarrow{AP}$ (2)

12. i) താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് $y = f(x)$ എന്ന ഫങ്ഷന്റെ $[a, b]$ എന്ന ഇന്റർവെലിലെ ഗ്രാഫാണ്




ഈ ഫങ്ഷൻ സ്ട്രിക്റ്റ്ലി ഇൻക്രീസിങ്ങും സ്ട്രിക്റ്റ്ലി ഡിക്രീസിങ്ങും ആകുന്ന ഇന്റർവെല്ലുകൾ കാണുക. (2)

ii) $f(x) = 2x^2 - 4x$ എന്ന ഫങ്ഷൻ

a) സ്ട്രിക്റ്റ്ലി ഇൻക്രീസിങ്ങും

b) സ്ട്രിക്റ്റ്ലി ഡിക്രീസിങ്ങും

ആകുന്ന ഇന്റർവെല്ലുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. (2)

13. i) $\int x \, dx = .....$ (1)

ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx$ ന്റെ വില കാണുക. (3)

14. i) $y = \sin x$, എന്ന കർവിൽ $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ എന്നിവയുടെ ഇടയിൽ വരുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക. (3)

ii) മേൽ ഉത്തരം ഉപയോഗിച്ച് $y = \sin^{-1} x$ എന്ന കർവിന്റെ $y = 0$ യ്ക്കും $y = \frac{\pi}{2}$ നും ഇടയിൽ വരുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക. (1)

15. $(1, -1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും $xy \frac{dy}{dx} = (x + 2)(y + 2)$ എന്നത് ഡിഫറൻഷ്യൽ സമവാക്യമായി വരുന്നതുമായ കർവിന്റെ സമവാക്യം കാണുക. (4)

16. i) $A(1, 2, -1)$; $B(-1, 1, 1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ചേർത്ത് വരക്കുന്ന വരയെ 2 : 1 എന്ന അനുപാതത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന $P$ എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ പൊസിഷൻ വെക്ടർ കാണുക. (2)

ii) $\overrightarrow{AP}$ എന്ന വെക്ടർ കണ്ടുപിടിക്കുക. (2)

17. i) Find a unit vector in the $XY$ plane which makes $60^\circ$ with the positive direction of X-axis. (1)

ii) Consider a unit vector which makes angles $45^\circ$, $60^\circ$ and an acute angle $\theta$ respectively with the positive directions of $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vectors

a) Find the angle $\theta$ (1)

b) Find the unit vector (2)

(8 × 4 = 32)

Questions 18 to 24 carry 6 marks each. Answer any **five** questions.

18. Solve the system of linear equations

$$3x - 2y + 3z = 8$$
$$2x + y - z = 1$$
$$4x - 3y + 2z = 4$$
(6)

19. i) Find the rate of change of area of a circle with respect to its radius, when $r = 10$ cm. (2)

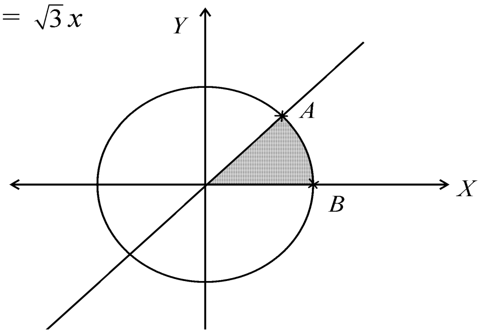
ii) Show that among all rectangles with given perimeter, the square has the maximum area. (4)

20. Find the following integrals

i) $\int \frac{x}{(x-1)(x-2)}\, dx$ (3)

ii) $\int_2^8 |x-5|\, dx$ (3)

21. Consider the circle $x^2 + y^2 = 16$ and the line $y = \sqrt{3}\,x$




i) Find the co-ordinates of $A$ and $B$ (2)

ii) Using ingegration find the area bounded by the shaded region (4)

17. i) X അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശയുമായി $60^\circ$ കോണളവുള്ളതും $XY$ പ്ലെയിനിലുള്ളതുമായ ഒരു യൂണിറ്റ് വെക്ടർ കാണുക. (1)

ii) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ എന്നീ വെക്ടറുകളുടെ പോസിറ്റീവ് ദിശകൾ യഥാക്രമം $45^\circ$, $60^\circ$, ന്യൂനകോൺ $\theta$ എന്നിങ്ങനെ കോണളവുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഒരു യൂണിറ്റ് വെക്ടർ പരിഗണിക്കുക.

a) കോൺ $\theta$ കാണുക. (1)

b) യൂണിറ്റ് വെക്ടർ കാണുക (2)

(8 × 4 = 32)

18 മുതൽ 24 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് 6 മാർക്ക് വീതമാണ്. ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും **5** എണ്ണത്തിന് ഉത്തരമെഴുതുക.

18. $$3x - 2y + 3z = 8$$
$$2x + y - z = 1$$
$$4x - 3y + 2z = 4$$
എന്നീ ലീനിയർ സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കാണുക. (6)

19. i) ആരം 10 സെ.മീ. ആകുമ്പോൾ ആരത്തിനനുസരിച്ച് ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിലുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കാണുക. (2)

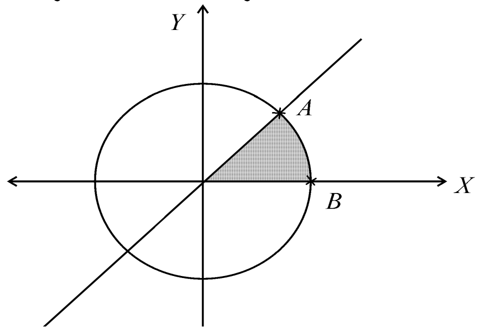
ii) നിശ്ചിത ചുറ്റളവുള്ള ചതുരങ്ങളിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവുള്ളത് സമചതുരത്തിനാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. (4)

20. ചുവടെതന്നിരിക്കുന്ന ഇന്റഗ്രലുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $\int \frac{x}{(x-1)(x-2)}\, dx$ (3)

ii) $\int_2^8 |x-5|\, dx$ (3)

21. $x^2 + y^2 = 16$ എന്ന വൃത്തവും $y = \sqrt{3}\,x$ എന്ന വരയും പരിഗണിക്കുക.




i) $A$, $B$ എന്നിവയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കാണുക. (2)

ii) ഇന്റഗ്രേഷൻ ഉപയോഗിച്ച് ഷെയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക. (4)

22. i) Form the differential equation representing the curve $y = ae^x + be^{2x}$ (2)

ii) Write the order and degree of the differential equation obtained in (i) (1)

iii) Solve the diferential equation

$\frac{dy}{dx} + y = \sin x$ (3)

23. i) If $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ are unit vectors, then prove that the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is $\frac{2\pi}{3}$ (3)

ii) If $\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{d} = m\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ are perpendicular to each other, then

a) Find the value of $m$ (1)

b) Fnd the area of the rectangle having adjacent sides $\vec{c}$ and $\vec{d}$ (2)

24. Consider the points $A(1, 1, 0)$ and $B(3, 0, 1)$

i) Find the equation of the line passing through $A$ and $B$. (2)

ii) Find the shortest distance between the above line and the line

$\overline{r} = 2i + j - k + \mu(3i - 5j + 2k)$ (4)

$(5 \times 6 = 30)$

22. i) $y = ae^x + be^{2x}$ എന്നതിന്റെ ഡിഫറൻഷ്യൽ സമവാക്യം രുപീകരിക്കുക. (2)

ii) (i) ൽ കണ്ടുപിടിച്ച ഡിഫറൻഷ്യൽ സമവാക്യത്തിന്റെ ഓർഡർ, ഡിഗ്രി എന്നിവ കാണുക. (1)

iii) $\frac{dy}{dx} + y = \sin x$ എന്ന ഡിഫറൻഷ്യൽ സമവാക്യം സോൾവ് ചെയ്യുക. (3)

23. i) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ എന്നിവ യൂണിറ്റ് വെക്ടറുകൾ ആയാൽ, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ക്ക് ഇടയിലുള്ള കോണളവ് $\frac{2\pi}{3}$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക. (3)

ii) $\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{d} = m\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ എന്നിവ പരസ്പരം ലംബമായൽ

a) '$m$' ന്റെ വില കാണുക. (1)

b) $\vec{c}$, $\vec{d}$ എന്നിവ സമീപ വശങ്ങളായിട്ടുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക. (2)

24. $A(1, 1, 0)$, $B(3, 0, 1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ പരിഗണിക്കുക

i) $A$, $B$ എന്നിവയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കാണുക. (2)

ii) മേൽ വരയും

$\overline{r} = 2i + j - k + \mu(3i - 5j + 2k)$

എന്ന വരയും തമ്മിലുള്ള കുറഞ്ഞ അകലം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(4)

$(5 \times 6 = 30)$