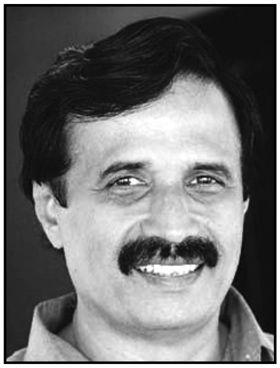
മുകുളം

എസ്.എസ്.എൽ.സി.
പഠനസഹായി
2016 – 2017

ഗണിതം

ജില്ലാപഞ്ചായത്ത് - കണ്ണൂർ
ഡയറ്റ് കണ്ണൂർ



പ്രൊഫ. സി.രവീന്ദ്രനാഥ്
വിദ്യാഭ്യാസ വകുപ്പ് മന്ത്രി
കേരള സർക്കാർ

സന്ദേശം

ഗുണമേന്മയുള്ള വിദ്യാഭ്യാസം കുട്ടിയുടെ അവകാശമാണ്. വിദ്യാഭ്യാസ രംഗത്ത് ഗുണപരവും ഗണപരവുമായ മികവ് ലക്ഷ്യം വെച്ചുകൊണ്ട് കണ്ണൂർ ജില്ലാ പഞ്ചായത്ത് നടപ്പിലാക്കിവരുന്ന 'മുകുളം' സമഗ്ര വിദ്യാഭ്യാസ പദ്ധതി കേരള വിദ്യാഭ്യാസ രംഗ ത്തിന് തന്നെ മാതൃകയാണ്. 2017 മാർച്ചിൽ നടക്കാനിരിക്കുന്ന പത്താംതരം പരീക്ഷയിൽ മുഴുവൻ കുട്ടികൾക്കും C+ നു മുകളിൽ ഗ്രേഡ് ലക്ഷ്യം വെച്ചുകൊണ്ട്, ഇംഗ്ലീഷ്, ഭൗതികശാസ്ത്രം, രസത ന്ത്രം, സാമൂഹ്യശാസ്ത്രം, ഗണിതം എന്നീ വിഷയങ്ങൾക്ക് കണ്ണൂർ ഡയറ്റിന്റെ നേതൃത്വത്തിൽ അധിക പഠനസാമഗ്രികൾ വികസിപ്പി ച്ചിട്ടുണ്ട് എന്നറിയുന്നതിൽ അതിയായ സന്തോഷമുണ്ട്. അർത്ഥ പൂർണമായ ഈ പദ്ധതിക്ക് എല്ലാവിധ ആശംസകളും നേരുന്നു.

എല്ലാ വിദ്യാർത്ഥികൾക്കും ഉന്നതവിജയം കൈവരിക്കാൻ സാധിക്കട്ടെ.

പുതുവത്സരാശംസകളോടെ,

തിരുവനന്തപുരം
15-12-2016

പ്രൊഫ.സി.രവീന്ദ്രനാഥ്
വിദ്യാഭ്യാസ വകുപ്പ് മന്ത്രി, കേരളം

കെ.വി.സുമേഷ്
പ്രസിഡണ്ട്,
കണ്ണൂർ ജില്ലാ പഞ്ചായത്ത്

ആമുഖം

കണ്ണൂർ ജില്ലയുടെ വിദ്യാഭ്യാസ മുന്നേറ്റത്തിന്റെ അടയാള മായ മുകുളം പദ്ധതി സംസ്ഥാനതലത്തിൽ തന്നെ അംഗീകരി ക്കപ്പെട്ടതാണല്ലോ. കുട്ടികളുടെ സമഗ്രവികസനം ലക്ഷ്യം വെച്ചു കൊണ്ട് വൈവിധ്യമാർന്ന വിദ്യാഭ്യാസ പദ്ധതികൾ ഈ വർഷവും ജില്ലാ പഞ്ചായത്ത് ആവിഷ്കരിച്ച് നടപ്പിലാക്കി വരി കയാണ്. പത്താം ക്ലാസിലെ മുഴുവൻ വിദ്യാർത്ഥികളുടേയും ഉന്നത വിജയം ഉറപ്പാക്കുന്ന സമയബന്ധിത കർമ്മ പരിപാടി യാണ് മുകുളം. മുകുളം എന്ന പേരിൽ പ്രത്യേക പ്രവർത്തന പുസ്തകം തയ്യാറാക്കി നൽകുന്നത് കണ്ണൂർ ഡയറ്റാണ്. പൊതു വിദ്യാഭ്യാസത്തിന്റെ ഗുണമേന്മ മെച്ചപ്പെടുത്തുന്നതിൽ കണ്ണൂർ ജില്ലാ പഞ്ചായത്തിന്റെ ഇടപെടലുകൾ നിർണായക സ്വാധീനം ചെലുത്തിയിട്ടുണ്ട്. അധ്യാപകരുടേയും കുട്ടികളുടേയും രക്ഷി താക്കളുടേയും കൂട്ടായ പരിശ്രമത്തിലൂടെ നൂറുശതമാനം വിജ യമെന്ന ലക്ഷ്യം നേടിയെടുക്കുമെന്നതിന് ഈ പഠന സഹായി സഹായകരമാകട്ടെ എന്ന പ്രതീക്ഷയോടെ മുകുളം പൊതുസ മക്ഷം സമർപ്പിക്കുന്നു.

സ്നേഹപൂർവ്വം

കണ്ണൂർ
15-12-2016

കെ.വി സുമേഷ്

കെ.പി ജയബാലൻ
ചെയർമാൻ
വിദ്യാഭ്യാസ-ആരോഗ്യ സ്റ്റാന്റിംഗ് കമ്മിറ്റി
കണ്ണൂർ ജില്ലാപഞ്ചായത്ത്

ആശംസ

ഓരോ വിഷയത്തിലും പാഠ്യപദ്ധതി വിഭാവനം ചെയ്യുന്ന രീതിയിൽ ആശയപരവും പ്രയോഗികവുമായ ധാരണ ഓരോ കുട്ടിക്കും ലഭിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ക്ലാസ് മുറിക്കുള്ളിലും പുറത്തും ഇതിനായി ധാരാളം പ്രവർത്തനങ്ങൾ അധ്യാപകർ നടത്തുന്നുണ്ട്. അവരുടെ ശ്രമങ്ങൾക്ക് അക്കാദമികമായ ഊർജ്ജം പകരേണ്ടത് നമ്മുടെ ഉത്തരവാദിത്തമാണ്.

ഈയൊരു ലക്ഷ്യസാക്ഷാത്കാരത്തിനാണ് കണ്ണൂർ ജില്ലാപഞ്ചായത്ത് മുകുളം പദ്ധതി ആവിഷ്കരിച്ചത്. വിവിധ വിഷയങ്ങളിൽ പിന്നാക്കക്കാരായ കുട്ടികൾക്കടക്കം വ്യക്തമായ ആശയധാരണ ലഭിക്കത്തക്ക രീതിയിൽ ലളിതമായാണ് മുകുളം പഠനസഹായി തയ്യാറാക്കിയിരിക്കുന്നത്. മുകുളം പദ്ധതിയുടെ ഭാഗമായുള്ള പഠനസഹായികൾ അധ്യാപകർക്കും വിദ്യാർത്ഥികൾക്കും രക്ഷിതാക്കൾക്കും ഫലപ്രദമായി പ്രയോജനപ്പെടുത്തുവാൻ സാധിക്കട്ടെ എന്ന് ആശംസിക്കുന്നു.

സ്നേഹപൂർവ്വം

കണ്ണൂർ
15-12-2016

കെ.പി ജയബാലൻ

എം. ബാബുരാജ്
ഡിഡിഇ, കണ്ണൂർ

ആശംസ

എല്ലാവരും പഠിക്കുകയും എല്ലാവരും ജയിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന വിദ്യാഭ്യാസമാണ് നാം ആഗ്രഹിക്കുന്നത്. പത്താംതരം വിജയശതമാനം വിദ്യാഭ്യാസത്തിന്റെ അളവുകോലായി മാറുന്നതും ഇതിന്റെ വെളിച്ചത്തിലാണ്. കണ്ണൂർ ജില്ലയുടെ വിദ്യാഭ്യാസ ചരിത്രത്തിൽ തിളക്കമാർന്ന അധ്യായം എഴുതിച്ചേർത്ത പദ്ധതിയാണ് 'മുകുളം'.

2017 മാർച്ചിൽ നടക്കാനിരിക്കുന്ന പത്താം തരം പൊതുപരീക്ഷയിൽ ജില്ലയിലെ മുഴുവൻ വിദ്യാർത്ഥികളെയും C+ ഗ്രേഡിനു മുകളിലെത്തിക്കുന്നതിലും മികച്ച വിജയം ജില്ലയ്ക്ക് നേടിക്കൊടുക്കുന്നതിനുമുള്ള പ്രവർത്തനങ്ങളാണ് 'മുകുളം' സാമഗ്രിയിലുള്ളത്. കണ്ണൂർ ഡയറ്റിന്റെ അക്കാദമിക നേതൃത്വത്തിൽ ജില്ലയിലെ മികച്ച അധ്യാപകരുടെ കൂട്ടായ്മയിലൂടെയാണ് ഇതു വികസിപ്പിച്ചിട്ടുള്ളത്. ഇതിലെ മുഴുവൻ പ്രവർത്തനങ്ങളും വിദ്യാർത്ഥികളിലെത്തിച്ച് മികച്ച വിജയം സമ്മാനിക്കേണ്ടത് അധ്യാപകരാണ്. അധ്യാപകരുടെ ആത്മാർത്ഥമായ സഹകരണം ഉണ്ടായാൽ മാത്രമേ ഇതു സാധ്യമാകൂ. എല്ലാ അധ്യാപകർക്കും അതിനു കഴിയണം. എല്ലാ കുട്ടികൾക്കും വിജയാശംസകൾ നേരുന്നു.

സ്നേഹപൂർവ്വം

കണ്ണൂർ
15-12-2016

എം.ബാബുരാജ്

മുകുളം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ

മുകുളം അധിക പഠന സാമഗ്രിയാണ്. പാഠപുസ്തകത്തിന്റെ കൂടെ നിൽക്കുന്ന പരീക്ഷാ പഠന സഹായിയായിട്ടാണ് 'മുകുള'ത്തെ വിഭാവനം ചെയ്തിട്ടുള്ളത്. എല്ലാ തലത്തിലുമുള്ള കുട്ടികളുടെ പഠന പരിപോഷണത്തെയും പരീക്ഷാ പ്രകടനത്തെയും മുകുളം ലക്ഷ്യമിടുന്നു.

ഡയറ്റിന്റെ അക്കാദമിക നേതൃത്വത്തിൽ ജില്ലയിലെ മികച്ച അധ്യാപകർ തയ്യാറാക്കിയതാണ് ഈ പഠന സഹായി. വിനിമയത്തിനു വിഷമമനുഭവപ്പെടുന്ന പാഠ്യവസ്തുതകൾ, സുഗമവും രസകരവുമായ പഠന തന്ത്രങ്ങൾ, പത്താംതരം പരീക്ഷയ്ക്ക് സാധ്യതയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾ, വ്യത്യസ്ത ചോദ്യ മാതൃകകൾ, തുടങ്ങി ഒട്ടേറെ പഠന വിഭവങ്ങൾകൊണ്ട് സമൃദ്ധമാണ് മുകുളം. കുട്ടികളുടെ അന്വേഷണ പഠനത്തെയും സ്വയം പഠനത്തെയും പ്രോത്സാഹിപ്പിക്കുന്ന പ്രവർത്തനങ്ങളും മുകുളം പാക്കേജിലുണ്ട്.

ഇത് മുന്നോട്ടുവെക്കുന്ന ലക്ഷ്യം നിറവേറണമെങ്കിൽ അധ്യാപകരുടെ സമർപ്പിതമായ സേവനമനോഭാവം കൂടിയേ തീരൂ. സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ രംഗത്തിനു തന്നെ മാതൃകയായ 'മുകുളം' പദ്ധതിയുടെ വിജയം അധ്യാപകരുടെ കൈകളിലാണ്. അർപ്പണമനോഭാവത്തോടെ ഈ പ്രവർത്തനങ്ങളെ അർത്ഥപൂർണമായി കുട്ടികളിലെത്തിക്കാൻ കഴിയട്ടെ എന്നാശംസിക്കുന്നു.

സ്നേഹത്തോടെ

കണ്ണൂർ
15-12-2016

സി.എം.ബാലകൃഷ്ണൻ
പ്രിൻസിപ്പാൾ, ഡയറ്റ് കണ്ണൂർ

ഉപദേശക സമിതി
കെ.വി.സുമേഷ് (പ്രസിഡണ്ട്, ജില്ലാ പഞ്ചായത്ത്, കണ്ണൂർ)
കെ.പി.ജയബാലൻ (ചെയർമാൻ, വിദ്യാഭ്യാസ ആരോഗ്യ സ്റ്റാന്റിംഗ് കമ്മിറ്റി, ജില്ലാ പഞ്ചായത്ത് കണ്ണൂർ)
എം.ബാബുരാജൻ (ഡി.ഡി.ഇ., കണ്ണൂർ)
കെ.എം.കൃഷ്ണദാസ് (എ.ഡി.പി.ഒ., ആർ.എം.എസ്.എ,കണ്ണൂർ)
ഡോ: പി.വി.പുരുഷോത്തമൻ (ഡി.പി.ഒ., എസ്.എസ്.എ.കണ്ണൂർ)

ചീഫ് കോ-ഓർഡിനേറ്റർ
സി.എം.ബാലകൃഷ്ണൻ (പ്രിൻസിപ്പാൾ, ഡയറ്റ്, കണ്ണൂർ)

കോ-ഓർഡിനേറ്റർ
ഡോ: എം.ബാലൻ (സീനിയർ ലക്ചറർ, ഡയറ്റ്, കണ്ണൂർ)
പി.യു.രമേശൻ (സീനിയർ ലക്ചറർ, ഡയറ്റ്, കണ്ണൂർ)
കെ.എം.ചന്ദ്രൻ (സീനിയർ ലക്ചറർ, ഡയറ്റ്, കണ്ണൂർ)
ഡോ: കെ.പി.ഗോപിനാഥൻ (ലക്ചറർ, ഡയറ്റ് കണ്ണൂർ)

ശില്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

1. **സുരേഷ് ബാബു.സി**
   എച്ച് എം,എച്ച് എസ് എ മാത്സ്, ജി എച്ച് എസ് തവിടിശ്ശേരി
2. **സുജിത്. എൻ**
   എച്ച് എസ് എ മാത്സ്, ജി വി എച്ച് എസ് എസ് കണ്ണൂർ
3. **സതീശൻ .എൻ**
   എച്ച് എസ് എ മാത്സ്, ജി.എച്ച് എസ് തിരുവങ്ങാട്
4. **നന്ദകുമാർ.സി**
   എച്ച് എസ് എ മാത്സ്, ചോതാവൂർ എച്ച് എസ് എസ്
5. **മോഹനൻ.സി**
   എച്ച്.എം, ജി എച്ച് എസ് എസ് കൊട്ടില
6. **സതീഷ് കുമാർ കെ.പി**
   എച്ച് എം, ജി എച്ച് എസ് അരോളി
7. **പി.എം,കൃഷ്ണപ്രഭ**
   എച്ച് എസ് എ മാത്സ്, അഴീക്കോട് എച്ച് എസ് എസ്
8. **പി ആർ പ്രഭാകരൻ**
   എച്ച് എസ് എ മാത്സ്, ജി എച്ച് എസ് എസ് മാതമംഗലം
9. **സുരേഷ് ബാബു.കെ.എം**
   എച്ച് എസ് എ മാത്സ്, ആർ വി എച്ച് എസ് എസ് ചൊക്ലി
10. **നാരായണൻ. ടി**
    എച്ച് എസ് എ മാത്സ്, പി ആർ എം കെ. എച്ച് എസ് എസ്, കൊളവല്ലൂർ
11. **ശിവദാസൻ.സി.സി**
    എച്ച് എസ് എ മാത്സ്, മമ്പറം എച്ച് എസ് എസ്

1
സമാന്തരശ്രേണികൾ

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- സംഖ്യാ ശ്രേണികൾ
- ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം
- സമാന്തര ശ്രേണികൾ
- സ്ഥാനവും പദവും
- സമാന്തര ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം
- ഒന്നു മുതൽ തുടർച്ചയായ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക
- സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ പദങ്ങളുടെ തുക.

മുന്നറിവുകൾ

- എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ● ഒറ്റസംഖ്യകൾ ● ഇരട്ട സംഖ്യകൾ ● അഭാജ്യസംഖ്യകൾ ● പൂർണ്ണവർഗ സംഖ്യകൾ ● എണ്ണൽ സംഖ്യയുടെ ഗുണിതങ്ങൾ ● ചതുഷ്ക്രിയകൾ ●.............●.............●.............

സംഖ്യാശ്രേണികൾ

സൂചനകൾക്കനുസരിച്ച് സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

1. 2 മുതൽ തുടർച്ചയായ ഇരട്ട സംഖ്യകൾ
2. 1 മുതൽ തുടർച്ചയായ ഒറ്റസംഖ്യകൾ
3. 5 മുതൽ തുടർച്ചയായ 5ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ
4. 3ൽ അവസാനിക്കുന്ന തുടർച്ചയായ എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ
5. 2ന്റെ തുടർച്ചയായ കൃതികൾ
6. ത്രികോണം, ചതുർഭുജം, പഞ്ചഭുജം തുടങ്ങിയ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ അക കോണുകളുടെ തുക.

ഈ സംഖ്യാ കൂട്ടങ്ങളെല്ലാം ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത്, മൂന്നാമത്തേത് എന്നിങ്ങനെ വിവിധ സ്ഥനങ്ങളിലുള്ള സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്താമല്ലോ. ഇത്തരം സംഖ്യാ കൂട്ടങ്ങളെയാണ് **സംഖ്യശ്രേണികൾ** എന്ന് പറയുന്നത്. ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളെ **പദങ്ങൾ** എന്നുപറയുന്നു.

സംഖ്യാശ്രേണികൾ എഴുതുക.

1. 4ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ
2. ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്ത് 7 വരുന്ന സംഖ്യകൾ
3. 5 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 2 വരുന്ന സംഖ്യകൾ
4. 10ന്റെ കൃതികൾ
5. 1 സെ.മീ, 2 സെ.മീ, 3 സെ.മീ എന്നിങ്ങനെ വശങ്ങളുള്ള സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ.

ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം

3ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെ ശ്രേണി എഴുതുക.

ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദം = ...

രണ്ടാംപദം = ...

മൂന്നാംപദം = ...

....

പത്താംപദം = ...

ഇതുപോലെ ശ്രേണിയിലെ ഏത് സ്ഥാനത്തുള്ള പദവും കണ്ടെത്താമല്ലോ. ശ്രേണിയിലെ സ്ഥാനവും പദവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാം. ഈ ശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ പദങ്ങളെ x_1, x_2, x_3,...... എന്നിങ്ങനെ സൂചിപ്പിച്ചാൽ

x_1= 3x1=3; x_2= 3x2=6; x_3= 3x3=9

x_{10}= 3x10=30; ....; ....;

ആയാൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളും സ്ഥാനങ്ങലും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് $x_n = 3n$ എന്നെഴുതാം. ഇതാണ് ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം.

i) പൂർണവർഗ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം എന്താണ്?

$x_2 = 1^2 = 1$

$x_2 = 2^2 = 2^2$

$x_3 = 3^2 = 3^2$

....

$x_n = n^2$

ii) 4 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 3 വരുന്ന സംഖ്യാശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം എഴുതുക.

ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദം ഏതാണ്?

ശ്രേണി : 3, 7, 11, ...

x_1 = 3 = 4 x 1 - 1

x_2 = 7 = 4 x 2 - 1

x_3 = 11 = 4 x 3 - 1

....

x_n = 4 x n - 1

= 4n - 1

1. ചുവടെ കൊടുത്ത സംഖ്യാശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം എഴുതുക.

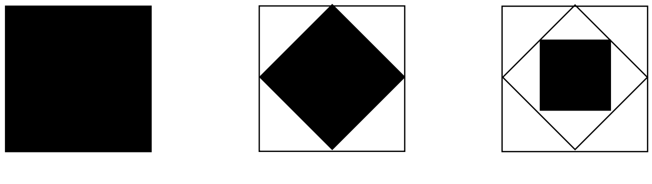
എ) ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

ബി) 7ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെ ശ്രേണി.

സി) 7 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 വരുന്ന സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി.

ഡി) 3ൽ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി.

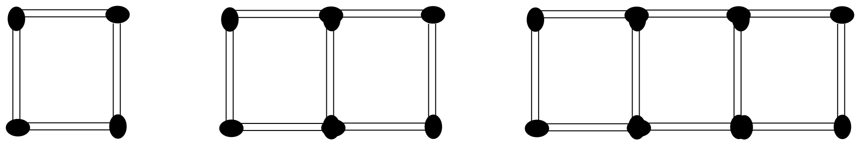
2.



ആദ്യ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു സമചതുരമുണ്ടാക്കിയതാണ് രണാമത്തെ ചിത്രം. ഇതിലെ ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് വീണ്ടും സമചതുരം ഉണ്ടാക്കിയതാണ് മൂന്നാമത്തെ ചിത്രം. ആദ്യ സമചതുരത്തിന്റെ വശം 1 മീറ്റർ ആണ്. ഈ ചിത്രങ്ങൾ ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ ഷെയ്ഡ് ചെയ്ത ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവുകളുടെ ശ്രേണി എഴുതുക.

സമാന്തര ശ്രേണികൾ

തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾ കൊണ്ട് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ സമചതുരങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു.



ആദ്യ സമചതുരം ഉണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച കോലുകളുടെ എണ്ണം = ...

തുടർന്നുള്ള ഓരോ സമചതുരത്തിന്റെയും ചതുരത്തിനും എത്ര കോലുകൾ വീതം ഉണ്ടാക്കുന്നു?

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ, ഓരോ ചിത്രത്തിലും ഉപയോഗിച്ച തീപ്പെട്ടിക്കോലുകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ ശ്രേണി എഴുതി നോക്കൂ.

....

ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദമായ 4നോട് വീണ്ടും വീണ്ടും 3 കൂട്ടിയാണ് മറ്റു പദങ്ങൾ കിട്ടുന്നത്. ഇത്തരത്തിൽ ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്ന് തുടങ്ങി ഓരേ സംഖ്യതന്നെ വീണ്ടും വീണ്ടും കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയെ **സമാന്തരശ്രേണി** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമാന്തര ശ്രേണികളിൽ വിട്ടിട്ടുള്ള രണ്ടുപദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. 5, 13, ..., ...
2. 25, 42, ..., ...
3. ...., ..., 37, 50
4. ...., 100, 120, ...

ഓരോ ശ്രേണിയിലും വീണ്ടും വീണ്ടും കൂട്ടിയ സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെ?

ഓരോ സമാന്തര ശ്രേണിയിലെയും ഒരു പദത്തിൽ നിന്ന് തൊട്ട് പിറകെയുള്ള പദം കുറച്ചാൽ ഈ സംഖ്യ കണ്ടെത്താമല്ലോ. ഓരോ സമാന്തര ശ്രേണിയിലെയും ഈ സ്ഥിരവിത്യാസത്തെ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ **പൊതുവിത്യാസം** എന്നു പറയുന്നു.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. ആദ്യപദം 4ഉം പൊതുവിത്യാസം 7ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണി എഴുതുക.
2. 37, 56, 75, ... എന്ന സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ അടുത്ത രണ്ട് പദങ്ങൾ എഴുതുക.
3. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ 5-ാം പദം 23ഉം 6-ാം പദം 31ഉം ആകുന്നു. 7-ാം പദമേത്? 4-ാം പദമോ?
4. പൂർണവർഗസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി, സമാന്തരശ്രേണിയാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

സ്ഥാനവും പദവും

1. ആദ്യപദം 3ഉം പൊതുവിത്യാസം 5ഉം ആയ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ മൂന്നാം പദമേതാണ്?

   മൂന്നാം പദം കാണുന്നതിൽ ആദ്യപദത്തോട് പൊതുവ്യത്യാസം എത്രതവണയാണ് കൂട്ടിയത്? പത്താം പദം കാണണമെങ്കിൽ ആദ്യപദത്തോട് പൊതുവിത്യാസം എത്ര തവണ കൂട്ടണം?
2. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം 8 ആണ്. 5-ാം പദം 47 ആയാൽ 9-ാം പദം ഏത്?
3. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 3-ാം പദം 17ഉം 8-ാം 57ഉം ആണ്.

   3-ാം പദത്തോട് പൊതുവ്യത്യാസം എത്രതവണ കൂട്ടിയാലാണ് 8-ാം പദം കിട്ടുക.

പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ 5 മടങ്ങ് എത്ര?

പൊതുവ്യത്യാസം എത്ര?

4. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 4-ാം പദം 23ഉം 12-ാം പദം 79ഉം ആണ്.

സ്ഥാനവ്യത്യാസം = ...

പദവ്യത്യാസം = ...

പൊതുവ്യത്യാസം = ...

സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ വ്യത്യാസവും അവയുടെ സ്ഥാനവ്യത്യാസവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്ത്?

പൊതുവ്യത്യാസം $= \frac{\text{പദവ്യത്യാസം}}{\text{സ്ഥാനവ്യത്യാസം}}$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ സമാന്തര ശ്രേണിയിലെയും വിട്ടിട്ടുള്ള പദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) 13, 20, ..., ..., ...

ii) 9, ..., 21, ..., ...

iii) 24, ..., ..., ..., 60

iv) ...., 15, ..., ..., 27

2. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 5-ാം പദം 68ഉം 12-ാം പദം 110 ഉം ആണ്. പൊതുവ്യത്യാസം എത്ര? 20-ാം പദം ഏത്?

3. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ രണ്ടാം പദം 14ഉം 10-ാം പദം 86ഉം ആണ്. ആദ്യപദം കാണുക. 18-ാം പദമേത്?

4. 3, 7, 11, ... സമാന്തര ശ്രേണിയിൽ 200 ഒരു പദമാകുമോ? ഈ ശ്രേണിയിലെ ഏറ്റവും വലിയ മൂന്നക്ക സംഖ്യ ഏതാണ്?

5. 8 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 1 വരുന്ന സംഖ്യാ ശ്രേണിയിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ മൂന്നക്ക സംഖ്യയും ഏറ്റവും വലിയ മൂന്നക്ക സംഖ്യയും കാണുക. ഈ ശ്രേണിയിൽ മൂന്നക്ക സംഖ്യയുടെ എണ്ണമെത്ര?

സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം

i) ആദ്യപദം 7ഉം പൊതുവ്യത്യാസം 4ഉം ആയ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ രണ്ടാം പദമേത്?

അഞ്ചാം പദമോ?

15-ാം പദവും കാണുക.

ii) ആദ്യപദം f ഉം പൊതുവിദ്യാസം d ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ x_1, x_2, x_3,...... എന്നിങ്ങനെ ആണെങ്കിൽ?

$$x_1 = f$$
$$x_2 = f + d$$
$$x_3 = f + 2d$$
....
$$x_7 = f + ...d$$
....
$$x_n = f + (n-1)\,d$$
$$= f + dn - d$$
$$= dn + f - d$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. ചുവടെ കൊടുത്ത ഓരോ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതം കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. 7, 13, 19, ...
2. 5, 7, 9, ...
3. 3, 11, 19, ...
4. 1, 8, 15, ...
5. 7, 14, 21, ...
6. 10, 19, 28, ...

സമാന്തര ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതത്തിന് ഒരു പൊതുരൂപമുണ്ടെന്ന് കാണാം. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ നിശ്ചിത സ്ഥാനത്തെ പദം, സ്ഥാനസംഖ്യയെ പൊതുവ്യത്യാസം കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കൂട്ടിയതാണ്.

സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ $x_n = an+b$

കൂടാതെ $x_n = an+b$ ആയ ഏത് ശ്രേണിയും സമാന്തര ശ്രേണി ആണ്. ഈ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ പൊതുവിത്യാസം a യും ആദ്യപദം $a + b$ യും ആയിരിക്കും.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. ഏതാനും സമാന്തര ശ്രേണികളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി പട്ടിക കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. വിട്ടിട്ടുള്ളവ കണ്ടെത്തുക.

ക്രമ നമ്പർ	x_n	പൊതുവ്യത്യാസം	ആദ്യപദം
1	$3n + 1$	-------	-----
2	$7 + 5n$	-------	-----
3	$1 - 4n$	-------	-----
4	$6\,n$	-------	-----
5	-----	3	7
6	-----	7	5
7	-----	2	3

2. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം $4n - 3$ ആണ്. ശ്രേണിയുടെ പത്താംപദം കാണുക.
3. രണ്ട് സമാന്തര ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപങ്ങൾ യഥാക്രമം $3n + 2$, $3n + 7$ എന്നിവയാണ്. രണ്ട് ശ്രേണികളുടെയും ആദ്യപദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമെത്ര? 100-ാം പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമോ?
4. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം $3n - 1$ ആകുന്നു. 200 ഈ ശ്രേണിയിലെ പദമാകുമോ?
5. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം $4n + 3$ ആകുന്നു. ഈ ശ്രേണിയിലെ എത്രമത്തെ പദമാണ് 75?

5. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 5-ാം പദം 37ഉം 12-ാം പദം 93ഉം ആകുന്നു. ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം കാണുക.

പദങ്ങളുടെ തുക

1 + 2 + 3 = ...

2 + 3 + 4 = ...

3 + 4 + 5 = ...

അടുത്തടുത്ത 3 എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ നടുവിലത്തെ സംഖ്യ x ആയാൽ

ആദ്യത്തെ സംഖ്യ = ...

മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ = ...

മൂന്ന് സംഖ്യകളുടെ തുക = ...+ x + ...

= ....

സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത 3 പദങ്ങളിൽ നടുവിലത്തെ പദം x ഉം പൊതുവ്യത്യാസം y ഉം ആണെങ്കിൽ

ആദ്യത്തെ പദം = ...

മൂന്നാം പദം = ...

മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക = ...+ x + ...

= ....

സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത 5 പദങ്ങൾ, 7 പദങ്ങൾ തുടങ്ങിയവയ്ക്ക് ഈ പ്രത്യേക ഉണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒറ്റ സംഖ്യ ആണെങ്കിൽ

പദങ്ങളുടെ തുക = മധ്യപദം X പദങ്ങളുടെ എണ്ണം

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ 25 പദങ്ങളിൽ എത്രാമത്തെ പദമാണ് മധ്യപദം?
2. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ 17 പദങ്ങളിൽ മധ്യപദം 50 എങ്കിൽ ആ പദങ്ങളുടെ തുക യെത്ര?
3. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 8-ാം പദം 70 ആണ്. ആദ്യത്തെ 15 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.
4. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 9 പദങ്ങളുടെ തുക 180 ആകുന്നു. അഞ്ചാംപദം ഏത്?

- ഒന്ന് മുതൽ തുടർച്ചയായ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക
  ആദ്യത്തെ 10 എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുകയെത്ര?
  (പാഠ പുസ്തകത്തിലെ പൊട്ടുകളുടെ ക്രമീകരണവും തുടർന്നുള്ള പ്രവർത്തനങ്ങളും)
  ആദ്യത്തെ n എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക $= \frac{n(n+1)}{2}$
  ആദ്യത്തെ n ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ തുക $= n(n+1)$
  ആദ്യത്തെ n ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ തുക $= n^2$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

എ) 1 + 2 + 3 + ... + 50

ബി) 2 + 4 + 6 + ... + 100

സി) 3 + 6 + 9 + ... + 150

ഡി) 1 + 3 + 5 + ... + 99

- **സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ പദങ്ങളുടെ തുക**

(എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുകയിൽ നിന്ന് സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ പദങ്ങളുടെ തുകയിലേക്ക്)

ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം $3n + 2$ ആണ്. ആദ്യത്തെ 10 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

$$x_1 = 3 \times 1 + 2$$
$$x_2 = 3 \times 2 + 2$$
$$x_3 = 3 \times 3 + 2$$
$$\dots\dots$$
$$x_{10} = 3 \times 10 + 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots x_{10} = 3(1+2+3+\dots\dots+10) + 10 \times 2$$
$$= \frac{3 \times 10 \times 11}{2} + 20$$
$$= 165 + 20$$
$$= 185$$

ഏതൊരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെയും തുടർച്ചയായ പദങ്ങളുടെ തുക ഇതുപോലെ കണ്ടുപിടിക്കാം.

സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം $x_n = an+b$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_n = \frac{an(n+1)}{2} + nb$$

ഇത് മറ്റൊരു രീതിയിലും എഴുതാം.

തുക $$s_n = \frac{n}{2}(x_n + x_1)$$

തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$s_n = \frac{an(n+1)}{2} + nb$$
$$= \frac{a}{2}n^2 + \left(\frac{a}{2} + b\right)n$$

ഇത് $pn^2 + qn$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്.

സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം $pn^2 + qn$

ഈ ശ്രേണിയുടെ പൊതുവിത്യാസം $2p$ എന്നും ആദ്യപദം $p + q$ എന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. 7, 13, 19,...... എന്ന സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.
2. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം $4n+1$ ആകുന്നു. ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 15 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.
3. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 'n' പദങ്ങളുടെ തുക $3n^2 + 4n$ ആണ്. പൊതുവിത്യാസം എത്ര? ആദ്യപദം ഏത്? ആദ്യത്തെ 10 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.
4. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം 13ഉം പൊതുവിത്യാസം 4ഉം ആകുന്നു. ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.
5. 5, 8, 11, ... എന്ന സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

ആകെ സ്കോർ : 20
സമയം : 1 മണിക്കൂർ

മൂല്യനിർണയ ചോദ്യങ്ങൾ

1. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം 8ഉം പൊതുവിത്യാസം 7ഉം ആണ്. ശ്രേണി എഴുതുക. ശ്രേണിയുടെ പത്താം പദമേത്? 2
2. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം $x_n = 4n + 3$ എന്നാകുന്നു. ശ്രേണി എഴുതുക. ഈ ശ്രേണിയിലെ ഒരു പദമാണോ 75 എന്ന് പരിശോധിക്കുക. 2
3. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ $'n'$ പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം $3n^2 + 2n$ ആകുന്നു. ശ്രേണിയുടെ പൊതുവിത്യാസമെത്ര? ആദ്യപദം എത്? ആദ്യത്തെ പത്ത് പദങ്ങളുടെ തുകയെത്ര? 2
4. 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 2 വരുന്ന ശ്രേണിയിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ രണ്ടക്ക സംഖ്യയേത്? ശ്രേണിയിലെ ഏറ്റവും വലിയ രണ്ടക്ക സംഖ്യ കാണുക. ഈ ശ്രേണിയിൽ ആകെ എത്ര രണ്ടക്ക സംഖ്യകൾ ഉണ്ട്? 2
5. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 8-ാം പദം 65ഉം 13-ാം പദം 110 ഉം ആകുന്നു. പൊതുവ്യത്യാസം എത്ര? ആദ്യപദം ഏത്? 25-ാം പദം കാണുക. 3
6. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 7 പദങ്ങളുടെ തുക 175 ആകുന്നു. പൊതുവ്യത്യാസം 4 ആയാൽ ആദ്യപദം ഏത്? ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക. 3
7. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 15-ാം പദം 100 ആകുന്നു. ആദ്യത്തെ 15 പദങ്ങളുടെ തുക 765 ആയാൽ ശ്രേണി രൂപീകരിക്കുക. തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക. 4

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. പൊതുവ്യത്യാസം 7 ആയ ഒരു സമാന്തരശ്രേണി എഴുതുക. ശ്രേണിയുടെ പത്താംപദം കാണുക.
2. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം 4 ആണ്. ശ്രേണിയുടെ 3-ാം പദവും 15-ാം പദവും തമ്മിലുള്ള വിത്യാസം എത്ര?
3. പൊതുവ്യത്യാസം 6 ആയ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 5-ാം പദം 37 ആയാൽ 12-ാം പദം ഏത്?
4. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 3-ാം പദം 25ഉം 10-ാം 39ഉം ആണ്. ശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം എത്ര? 20-ാം പദം കാണുക.
5. 23, a, b, 8 എന്നിവ സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത പദങ്ങളാണ്. a + b എത്ര?
6. 16, 22, 28, ... എന്ന സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 76 ആകാമോ?
7. 24, 31, 38, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 95 ഒരു പദമാവുമോ? എന്തുകൊണ്ട്?
8. 35, 41, 47, ... 155 എന്ന സമാന്തര ശ്രേണിയിൽ എത്ര പദങ്ങൾ ഉണ്ട്?
9. 200ൽ കുറവായ, 11ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ട്?

10. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം $7n-2$ ആകുന്നു. ശ്രേണിയുടെ

a) പൊതുവ്യത്യാസം എത്ര?

b) ആദ്യപദം ഏത്?

c) 20-ാം പദം കാണുക.

11. $8, x, 30$ എന്നിവ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത 3 പദങ്ങളായാൽ xന്റെ വില കാണുക.

12. $x+4$, $3x-2$, $4x-2$ എന്നിവ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത 3 പദങ്ങളാണെങ്കിൽ

a) xന്റെ വില കാണുക.

b) ശ്രേണി എഴുതുക.

c) ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം കാണുക.

13. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 13 പദങ്ങളുടെ തുക 325 ആകുന്നു. ശ്രേണിയുടെ 7-ാം പദാം കാണുക.

14. 92, 88, 84, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ എത്രമത്തെ പദമാണ് പൂജ്യം?

15. 3, 7, 11, ... സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ പദമാണോ 150 എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

16. പൊതുവിത്യാസം 9 ആയ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദമാണ് 85. ഈ ശ്രേണിയിലെ ഒരു പദമാണോ 400? എന്തുകൊണ്ട്?

17. 11, 17, 23, ... എന്ന സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം എഴുതുക.

18. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം $8n+3$ എന്നാകുന്നു.

a) ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെ 8 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എത്ര?

b) ഈ ശ്രേണിയിൽ എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ ഉണ്ട്?

19. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ $'n'$ പദങ്ങളുടെ തുക $3n^2-n$ ആകുന്നു. ആദ്യ പദമേത്? പൊതുവ്യത്യാസമെത്ര? ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

20. 5, 9, 13, ... സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

21. 5, 8, 11, 14, 17, ...

8, 12, 16, 20, 24, ...

11, 16, 21, 26, 31, ...

14, 20, 26, 32, 38, ...

....

....

a) ഈ സംഖ്യാ പാറ്റേണിലെ അടുത്തവരി എഴുതുക.

b) ഇതുപോലെ 20 വരി എഴുതിയാൽ 20-ാം വരിയിലെ ആദ്യ പദം ഏത്?

c) 20-ാം വരിയിലെ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ പൊതുവിത്യാസം എന്ത്?

d) 126 എന്ന സംഖ്യ, 20-ാം വരിയിലെ പദമാകുമോ?

22. 4, 11, 18, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും 8, 13, 20, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുകകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമെന്ത്?

23. a) ഒന്നു മുതൽ മുപ്പത് വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുകയെത്ര?

b) 8, 16, 24, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 30 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

c) പൊതുവ്യത്യാസം 8 ആയ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 30 പദങ്ങളുടെ തുക 3870 ആണ്. ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

24. 7, 12, 17, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 10 പദങ്ങളുടെ തുകയും അടുത്ത 10 പദങ്ങളുടെ തുകയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമെന്ത്?

25. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 3-ാം പദത്തിന്റെയും 23-ാം പദത്തിന്റെയും തുക 140 ആകുന്നു.

a) ആദ്യപദത്തിന്റെയും 25-ാം പദത്തിന്റെയും തുക എത്ര?

b) ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുകയെത്ര?

c) 13-ാം പദമേത്?

26. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $3n^2 +5n$ ആകുന്നു. സമാന്തര ശ്രേണി എഴുതുക. ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതം കാണുക.

27. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 10-ാം പദത്തിന്റെ 10 മടങ്ങും 16-ാം പദത്തിന്റെ 16 മടങ്ങും തുല്യമാണ്. ശ്രേണിയുടെ 26-ാം പദം കാണുക.

28. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 5-ാം പദം 12ഉം 12-ാം പദം 5ഉം ആകുന്നു.

a) പൊതുവ്യത്യാസമെത്ര?

b) 17-ാം പദമേത്?

2

വൃത്തങ്ങൾ

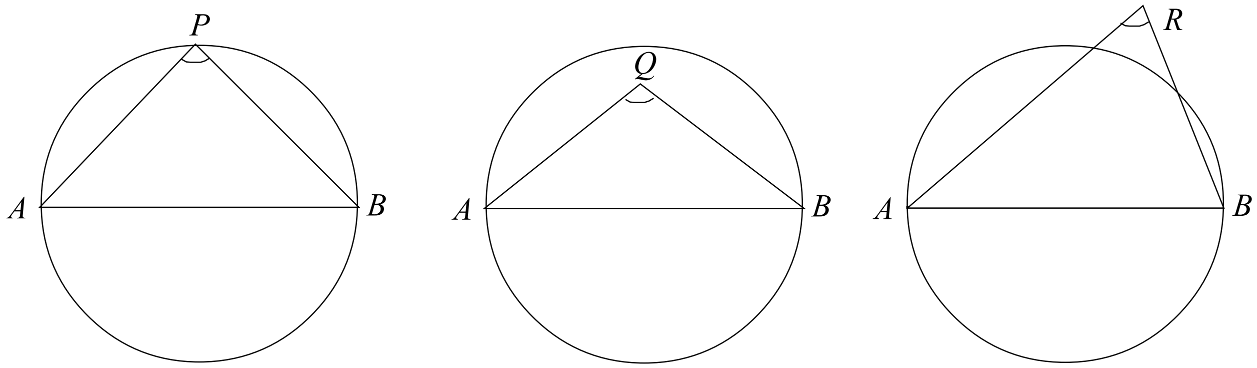
ഒമ്പതാം തരത്തിൽ വൃത്തത്തിലെ ഞാണുകളെയും ചാപങ്ങളെയും ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിനെയും കുറിച്ച് പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതിന്റെ തുടർച്ചയായി വരുന്ന ആശയങ്ങളാണ് ഈ പാഠത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. ഒമ്പതാം തരം വരെ പഠിച്ച പല ആശയങ്ങളും ഇതിൽ ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വരുന്നുണ്ട്. അവയിൽ പ്രധാനപ്പെട്ട ചില ആശയങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

- ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് കോണുകളുടെയും തുക 180^0 ആണ്.
- ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ ആ വശങ്ങൾക്കെതിരെയുള്ള കോണുകൾ തുല്യമായിരിക്കും.
- ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിലെ പുറം കോൺ, മറ്റ് രണ്ട് മൂലകളിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്.
- പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് കോണുകൾ മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിൻരെ രണ്ട് കോണുകൾക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണ്.
- സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ ആനുപാതികമാണ്.
- $a:b = c:d$ ആയാൽ $ad = bc$ ആയിരിക്കും.
- ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തം എന്ന ആശയം.
- മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണ്.
- ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാല് കോണുകളുടെയും തുക 360_0 ആണ്.
- വിവിധതരം ചതുർഭുജങ്ങളെയും അവയുടെ പ്രത്യേകതകളെയും കുറിച്ചുള്ള അറിവ്.
- സമചതുരം, ചതുരം ഇവയുടെ നിർമ്മിതി.
- വൃത്തത്തിലെ ഞാൺ എന്ന ആശയം.
- വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണിന്റെയും മധ്യലംബം വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകും.
- വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് ഞാണിലേക്കുള്ള ലംബം ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യും.
- വൃത്തചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എന്ന ആശയം.
- വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപത്തിന്റെയും അതിന്റെ മറുചാപത്തിന്റെയും കേന്ദ്രകോണുകളുടെ തുക 360^0.

മട്ടവും വൃത്തവും

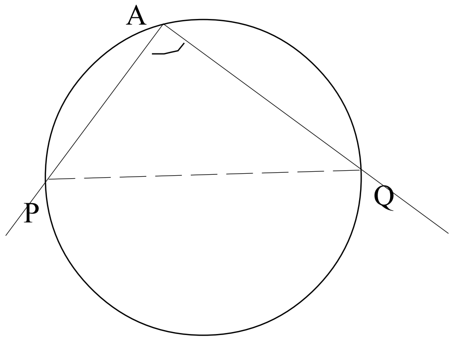
വൃത്തത്തിലും അകത്തും പുറത്തും വരുന്ന കോണുകളെ കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യുന്ന ഈ ഭാഗത്ത് വരുന്ന പ്രധാന ആശയങ്ങൾ ഇവയാണ്.

- വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് മട്ടകോൺ ആണ്. (അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ മട്ടകോൺ)
- വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിനകത്തെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ബൃഹത്കോൺ ആണ്.
- വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന് പുറത്തെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ന്യൂനകോൺ ആണ്.

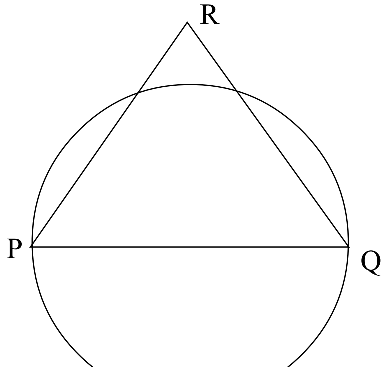


< APB - മട്ടകോൺ < AQB - ബൃഹത്കോൺ < ARB - ന്യൂനകോൺ

- ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റത്ത് നിന്ന് പരസ്പരം ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന വരകളെല്ലാം, ആ വര വ്യാസമായ വൃത്തത്തിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.
- വൃത്തത്തിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും പരസ്പരം ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന വരകൾ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമായിരിക്കും.

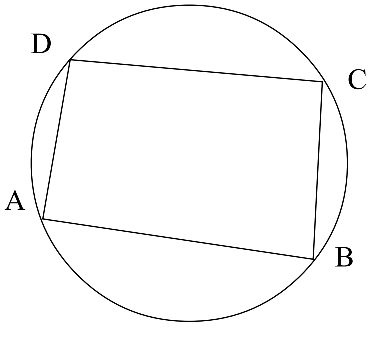


വൃത്തത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും പരസ്പരം ലംബമായി വരച്ച വരകളാണ് AP, AG അപ്പോൾ PQ എന്ന വര വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമായിരിക്കും.

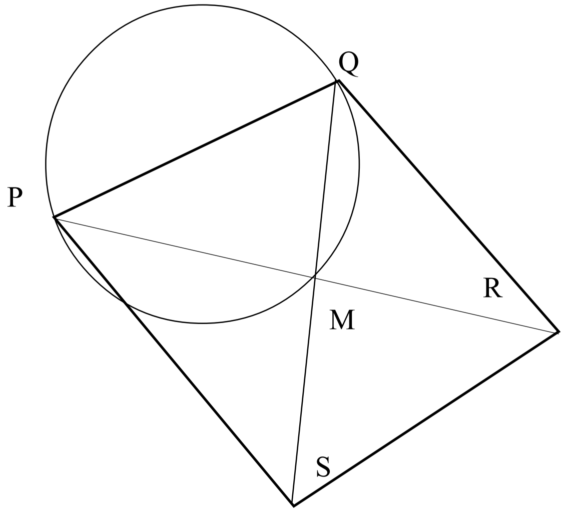


R

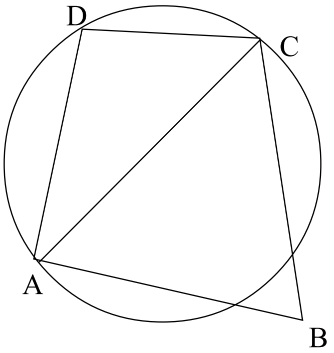
സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം വ്യാസമായി വൃത്തം വരച്ചാൽ മൂന്നാമത്തെ മൂല വൃത്തത്തിന് പുറത്തായിരിക്കും.
സമഭുജത്രികോണം PQR ൽ PQ വ്യാസമായ വൃത്തത്തിന് പുറത്താണ് R.



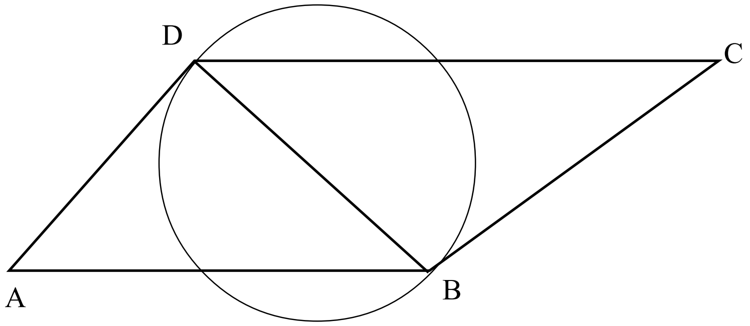
ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വികർണം വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണ് മറ്റ് രണ്ട് മൂലകളും
ചതുരം ABCD യിൽ AC വ്യാസമായ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണ് Bയും Dയും.

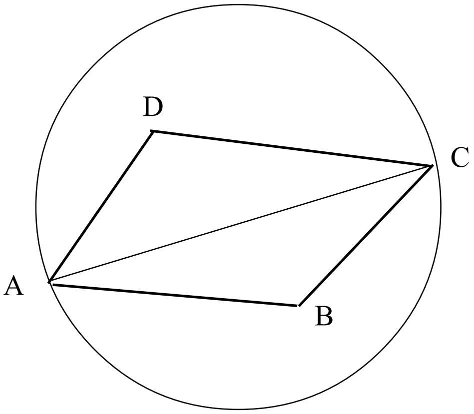


സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു വശം വ്യാസമായി വരക്കുന്ന വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവായിരിക്കും, വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദു (?)
സമഭുജസാമാന്തരികം PQRS ൽ PQ വ്യാസമായി വരച്ച വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവാണ് M.

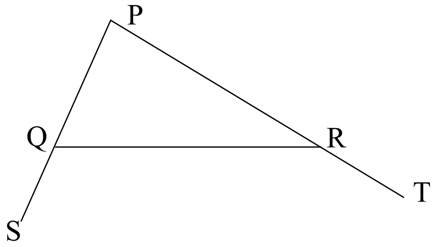


സമപാർശ്വലംബകത്തിന്റെ ഒരു വികർണം വ്യാസമായി വൃത്തംവരച്ചാൽ മറ്റ് മൂലകളിലൊന്ന് വൃത്തത്തിനകത്തും മറ്റേത് വൃത്തത്തിന് പുറത്തും ആയിരിക്കും
സമപാർശ്വലംബകം ABCD യിൽ AC വ്യാസമായി വരച്ച വൃത്തത്തിനകത്താണ് D, പുറത്താണ് B.



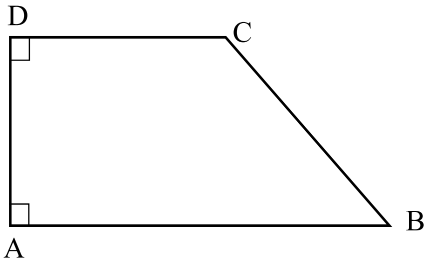


ചതുരമല്ലാത്ത സാമാന്തരികത്തിന്റെ ചെറിയ വികർണം വ്യാസമായി വൃത്തം വരച്ചാൽ മറ്റ് രണ്ട് മൂലകൾ വൃത്തത്തിന് പുറത്തും വലിയ വികർണം വ്യാസമായി വൃത്തം വരച്ചാൽ മറ്റ് രണ്ട് മൂലകൾ വൃത്തത്തിനകത്തും ആയിരിക്കും.

1) 

ചിത്രത്തിൽ < RQS=130^0, < QRT =120^0 ആണ്. QR വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ചാൽ, P എന്ന ബിന്ദു ആ വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ വൃത്തത്തിൽ തന്നെയോ എന്ന് കണ്ടെത്തുക.

2) സമപഞ്ചഭുജം ABCDE യിൽ AC വ്യാസമായി വൃത്തം വരച്ചാൽ B, ആ വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ, വൃത്തത്തിൽ തന്നെയോ എന്ന് കണ്ടെത്തുക.

3) 

ചിത്രത്തിൽ ലംബകത്തിന്റെ ഓരോ വികർണവും വ്യാസമായി വരയ്ക്കുമ്പോൾ മറ്റു മൂലകൾ എവിടെയായിരിക്കുമെന്ന് കണ്ടെത്തുക.

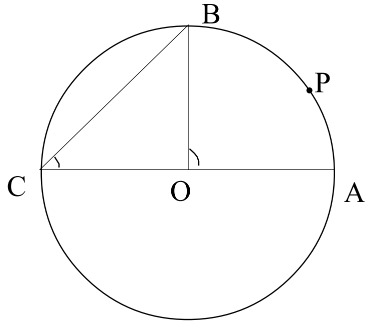
4) സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം, മറ്റു രണ്ട് വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

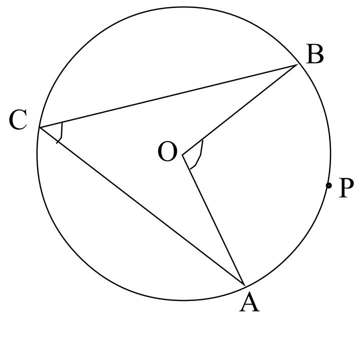
5) വശങ്ങളുടെ നീളം 5 $\sqrt{3}$ സെ.മി, 5 സെ.മി, 10 സെ.മി ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശവും വ്യാസമായി വൃത്തം വരച്ചാൽ, മൂന്നാംമൂല വൃത്തത്തിന്റെ എവിടെയായിരിക്കുമെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

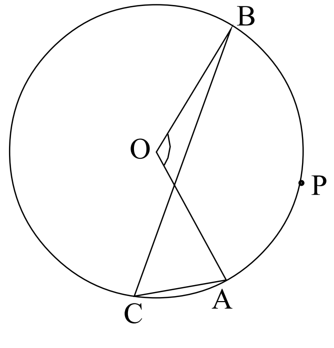
ഞാണും കോണും ചാപവും

വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമല്ലാത്ത ഏതു ഞാണും വൃത്തത്തെ രണ്ട് ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. ഭാഗങ്ങൾ തുല്യമല്ല. ഓരോ ഭാഗത്തിലെയും കോണുകളുടെ പ്രത്യേകതകളാണ് ഈ ഭാഗത്ത് വിശദീകരിക്കുന്നത്.

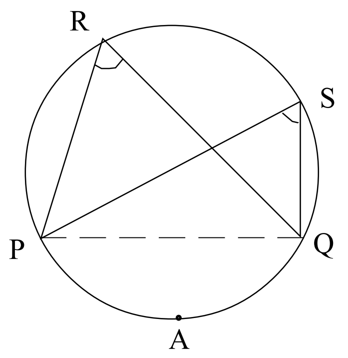
- വൃത്തത്തിലെ ഏതു ചാപവും കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാകുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ് മറുചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ.
- വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപം, മറുചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണ്. (ഓരേ ചാപത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്.)
- വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപം, അതേ ചാപത്തിലും മറു ചാപത്തിലുമുണ്ടാക്കുന്ന ഏതു ജോടി കോണുകളും അനുപൂരകങ്ങളാണ്. (മറു ചാപങ്ങളിലെ കോണുകൾ അനുപൂരകമാണ്)

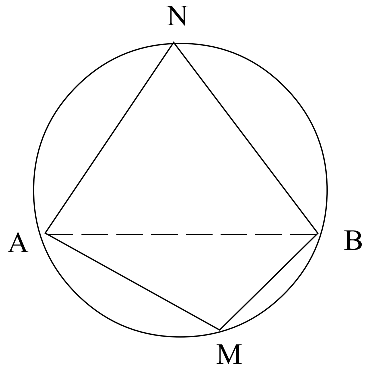




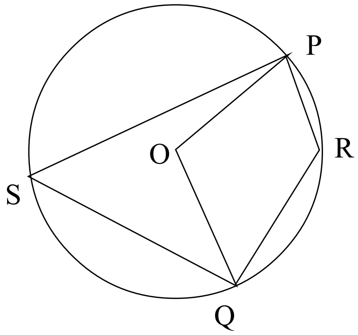


ചിത്രങ്ങളിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രം.
ഓരോന്നിലും ചാപം APB കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ < AOB യും മറു ചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ < ACB യുമാണ്.
അതുകൊണ്ട് ഓരോന്നിലും < AOB യുടെ പകുതിയാണ് < ACB





ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ < PRQ, < PSQ ഇവ തുല്യ കോണുകളാണ്.
രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ < AMB, < ANB ഇവ അനുപൂരകങ്ങളാണ്.

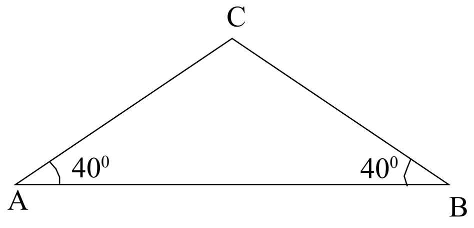


ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രം, < POQ = 110^0 ആണ്.
< PSQ, < PRQ ഇവ കാണുക.

2) ഒരു വൃത്തത്തിൽ വ്യാസമല്ലാത്ത ഒരു ഞാൺ ആണ് PQ . ചെറിയ വൃത്തഭാഗത്തിലെ കോൺ വലിയ വൃത്തഭാഗത്തിലെ കോണിന്റെ മൂന്ന് മടങ്ങാണ്. ഓരോ ഭാഗത്തിലെയും കോൺ എത്ര?

3) O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൽ AB ഒരു ഞാണും P വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവുമാണ്. < APB = 70^0 ആകത്തക്കവിധം വൃത്തവും ഞാണും വരയ്ക്കുക.

4)



ചിത്രത്തിൽ C വൃത്തകേന്ദ്രവും, AB ഞാണും ആകത്തക്കവിധം വൃത്തം വരച്ചാൽ ABയുടെ ഇരുഭാഗത്തുമുള്ള ചാപത്തിലെ കോണുകൾ എത്ര?

5) സമഭുജത്രികോണം PQR ൽ P കേന്ദ്രവും QR ഒരു ഞാണും ആകത്തിക്കവിധം വൃത്തം വരച്ചാൽ QR ന്റെ ഇരുഭാഗത്തുമുള്ള ചാപത്തിലെ കോണുകൾ എത്ര?

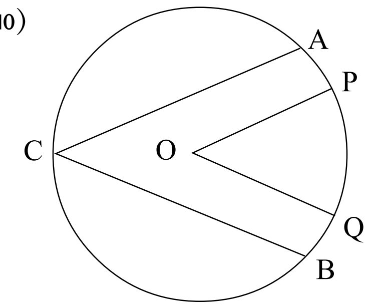
6) സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മട്ടമൂല കേന്ദ്രവും കർണം ഒരു ഞാണും ആകത്തക്കവിധം വൃത്തം വരച്ചാൽ കർണത്തിന്റെ ഇരുഭാഗത്തുമുള്ള ചാപത്തിലെ കോണുകൾ എത്ര?

7) സമപഞ്ചഭുജത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിൽ ഓരോ വശത്തിന്റെയും ഇരുഭാഗത്തുള്ള ചാപത്തിലെ കോണുകൾ എത്ര?

8) 3.5 സെ.മീ ആരത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം പരിവൃത്തമാകത്തക്കവിധം ഒരു സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

9) പരിവൃത്ത ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററും രണ്ട് കോണുകൾ $42\frac{1}{2}^0$, 55^0 യുമായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

10)

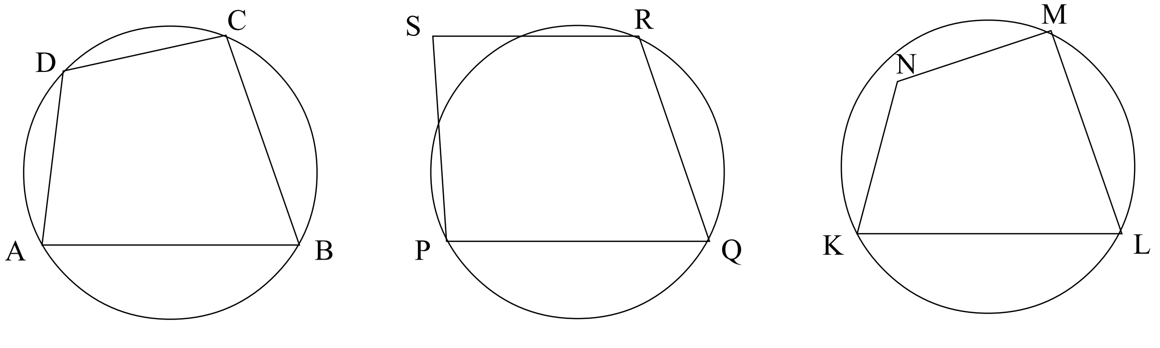


ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം, OP യും CA യും സമാന്തരം OQ ഉം CB യും സമാന്തരം.
< POQ ന്റെ ഉള്ളിൽ വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{12}$ ഭാഗം ഉൾപ്പെടുന്നു വെങ്കിൽ < ACB യുടെ ഉള്ളിൽ വൃത്തത്തിന്റെ എത്രഭാഗം?

വൃത്തവും ചതുർഭുജവും

ഒരു വരയിലല്ലാത്ത ഏത് മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടിയും (ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് മൂലകളിൽ കൂടിയും) വൃത്തം വരയ്ക്കാമെന്ന് ഒമ്പതാംതരത്തിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാല് മൂലകളിൽ കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ എന്നും അങ്ങിനെ വരയ്ക്കാവുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ എന്തെന്നും ഈ ഭാഗത്ത് പ്രതിപാദിക്കുന്നു.

- ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ അതിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകങ്ങളാണ്.
- ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്ന് മൂലകളിൽ കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിന് പുറത്താണ് നാലാമത്തെ മൂലയെങ്കിൽ, ആ മൂലയിലെയും എതിർമൂലയിലെയും കോണുകളുടെ തുക 180^0യേക്കാൾ കുറവാണ്.
- ഒരു ചതുർഭൂജത്തിന്റെ മൂന്ന് മൂലകളിൽ കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിനകത്താണ് നാലാമത്തെ മൂലയെങ്കിൽ, ആ മൂലയിലെയും എതിർമൂലയിലെയും കോണുകളുടെ തുക 180^0 യേക്കാൾ കൂടുതലാണ്.
- ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ നാല് മൂലകളിൽ കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാം. (അത്തരം ചതുർഭുജത്തെ ചക്രിയ ചതുർഭുജം എന്ന് വിളിക്കുന്നു)



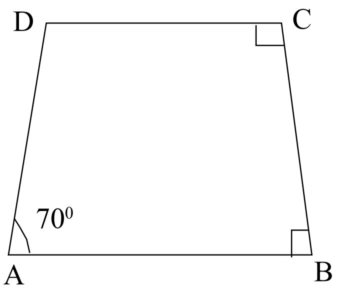
ചിത്രത്തിൽ $\angle A + \angle C = 180^0$, $\angle B + \angle D = 180^0$

< Q, < S ഇവയുടെ തുക 180^0 യേക്കാൾ കുറവാണ്.

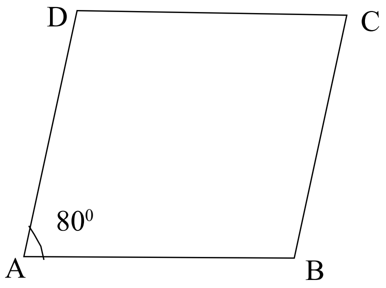
< L, < N ഇവയുടെ തുക 180^0 യേക്കാൾ കൂടുതലാണ്.

- ചതുരങ്ങളെല്ലാം ചക്രിയ ചതുർഭുജങ്ങളാണ്.
- സമപാർശ്വലംബകങ്ങൾ ചക്രിയ ചതുർഭുജങ്ങളാണ്.
- ചതുരമല്ലാത്ത സാമാന്തരികം ചക്രിയ ചതുർഭുജമല്ല.
- സമപാർശ്വമല്ലാത്ത ലംബകം ചക്രീകചതുർഭുജമല്ല.
- വികർണങ്ങൾ തുല്യമല്ലാത്ത സമഭുജസാമാന്തരീകം ചക്രിയ ചതുർഭുജമല്ല.

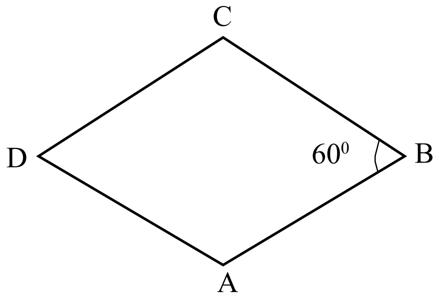
1) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ചതുർഭുജത്തിന്റെയും A, B, C എന്നീ മൂലകളിൽ കൂടിയുള്ള വൃത്തം വരച്ചാൽ D എന്ന മൂല, വൃത്തത്തിന്റെ എവിടെയായിരിക്കും.



ലംബകം ABCD



സാമാന്തരികം ABCD



സമഭുജസാമാന്തരികം ABCD

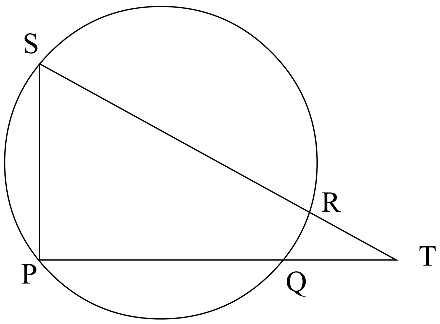
2) ചതുർഭുജം PQRS ൽ < P = 120^0, < Q =80^0, < R = 70^0 ആകുന്നു.

(i) P,Q,Rഇവ ഉൾപ്പെടുന്ന വൃത്തം വരച്ചാൽ അതിലെ ബിന്ദുവാണോ S ? എന്തുകൊണ്ട്?

(ii) PR വ്യാസമായ വൃത്തം വരച്ചാൽ അതിലെ ബിന്ദുവാണോ S? എന്തുകൊണ്ട്?

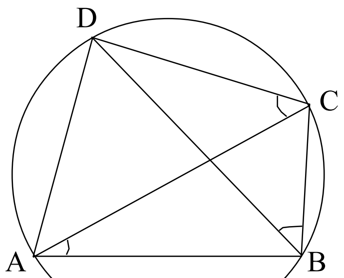
3) ചക്രീയ ചതുർഭുജം ABCD യിൽ AD=CD, < BAC=40^0 , < BCA=60^0ആയാൽ ത്രികോണം ADCയുടെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

4)



ചിത്രത്തിൽ RQ=RT, < QTR =40^0 ആകുന്നു.
ചതുർഭുജം PQRS ന്റെ എല്ലാ കോണുകളും കണക്കാക്കുക.

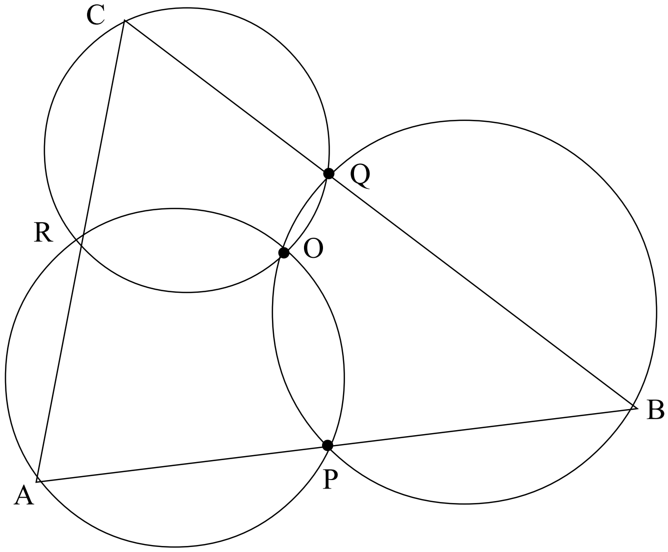
5)



ചിത്രത്തിൽ < BAC =35^0 , < CBD =30^0 , < DCA =60^0 ആകുന്നു.
< CAD, < BCD, < ADB ഇവ കാണുക.

6) ചക്രീയ ചതുർഭുജം PQRS യിൽ < P യുടെ രണ്ട് മടങ്ങാണ് < R. < Qന്റെ മൂന്നു മടങ്ങാണ്. < S. നാല് കോണുകളും കണക്കാക്കുക.

7) ചക്രീയ ചതുർഭുജം ABCD യിൽ AB യും DCയും സമാന്തരമാണ്. < A = 80^0 ആണെങ്കിൽ മറ്റ് മൂന്ന് കോണുകളും കണക്കാക്കുക.

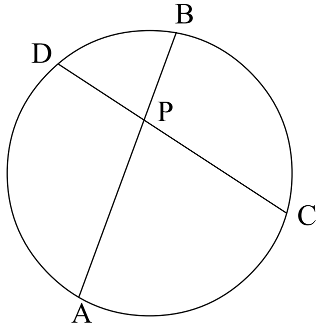
8) 

ചിത്രത്തിൽ മൂന്ന് വൃത്തങ്ങളും കട ന്നുപോകുന്ന ബിന്ദുവാണ് O. < OPA, < OQB, < ORC ഇവ തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

രണ്ടു ഞാണുകൾ

വ്യാസമല്ലാത്ത രണ്ട് ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ മുറിച്ചുകടക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന നാല് ഭാഗ ങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമാണ് ഈ പാഠഭാഗത്ത് പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുള്ളത്. ഈ ആശയം ഉപയോഗിച്ച്, ഒരു ചതുരത്തിന് തുല്യപരപ്പളവുള്ള മറ്റൊരു ചതുരമോ, സമചതുരമോ നിർമ്മിക്കുന്ന വിധവും ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

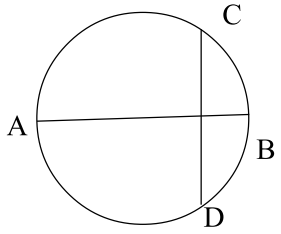
- ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ മുറിച്ചുകടക്കുമ്പോൾ രണ്ട് ഞാണുക ളുടെയും ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം തുല്യമാണ്.



ചിത്രത്തിൽ എന്നീ ഞാണുകൾ പരസ്പരം മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുവാണ് P .
PA x PB = PC x PD ആയിരിക്കും.

കൂടാതെ PA, PB എന്നീ ഭാഗങ്ങൾ വശങ്ങളായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = PA x PB ; PC, PD എന്നീ ഭാഗങ്ങൾ വശങ്ങളായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = PC x PD

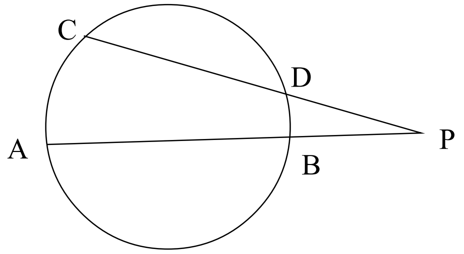
- അതായത് ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ട് ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ മുറിച്ചുകടക്കുമ്പോൾ ഓരോ ഞാണിന്റെയും ഭാഗങ്ങൾ വശങ്ങളായ ചതുരങ്ങൾക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണ്.
- വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിനെ, അതിന് ലംബമായ ഞാൺ മുറിച്ചുകടക്കുമ്പോഴുള്ള ഭാഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഞാണിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗത്തിന് തുല്യമാണ്.



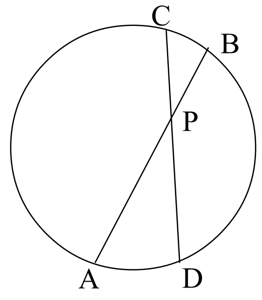
ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസം ABയ്ക്ക് ലംബമാണ് CD.
ABയെ CDമുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദു P.
PA x PB = PC^2 ആയിരിക്കും.

കൂടാതെ PA, PB എന്നീ ഭാഗങ്ങൾ വശങ്ങളായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = PA x PB
PC വശമായ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = PC^2

- അതായത് വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിനെ, അതിന് ലംബമായ ഒരു ഞാൺ മുറിയ്ക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ വശങ്ങളായ ചതുരത്തിന്റ പരപ്പളവ്, ഞാണിന്റെ പകുതി വശമായ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന് തുല്യമാണ്.

- 

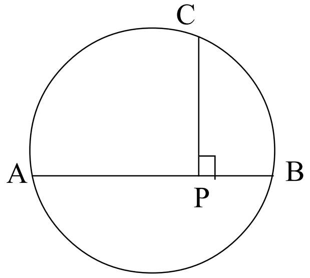
ചിത്രത്തിൽ AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ നീട്ടിയപ്പോൾ, വൃത്തത്തിന് പുറത്ത് P യിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. അപ്പോൾ PA x PB = PC x PD ആയിരിക്കും.

1) 

ചിത്രത്തിൽ PC= 6 സെ.മി, PD= 8 സെ.മി, PB = 5 സെ.മി ആകുന്നു.

(i) PA, PB എന്നീ ഭാഗങ്ങൾ വശങ്ങളായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര?

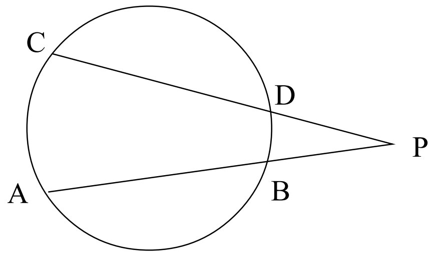
(ii) PA കണക്കാക്കുക.

2) 

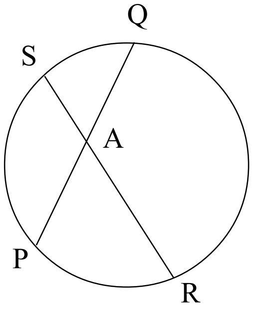
ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസമാണ്. PC= 12 സെ.മി, PA = 16 സെ.മി ആകുന്നു.

(i) PA, PB എന്നീ ഭാഗങ്ങൾ വശങ്ങളായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര?

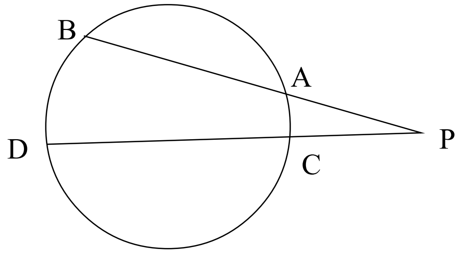
(ii) PB കണക്കാക്കുക.

3) 

ചിത്രത്തിൽ PB = 14 സെ.മി, AB = 10 സെ.മി, PD = 12 സെ.മി ആയാൽ CDഎത്ര?

4) 

ചിത്രത്തിൽ AP =AQ കൂടാതെ AR=5 സെ.മീ, AS=2 സെ.മീ എങ്കിൽ APഎത്ര?

5) 

ചിത്രത്തിൽ AP =AB കൂടാതെ PC=4 സെ.മീ, CD=14 സെ.മീ എങ്കിൽ PA എത്ര?

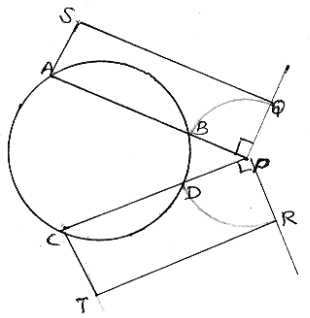
6) 4.5 സെ.മീ നീളവും 3 സെ.മീ വീതിയുമുള്ള ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പളവും നീളം 5 സെ.മീ ഉം ആയ ചതുരം വരയ്ക്കുക.

7. 6 സെ.മീ നീളവും 4 സെ.മീ വീതിയുമുള്ള ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം നിർമ്മിക്കുക.

8. 12 ചതുരശ്ര സെ.മീ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

9. വശങ്ങളുടെ നീളം 6.5 സെമീ, 7 സെ.മീ, 5 സെ.മീ ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പള വുള്ള സമചതുരം നിർമ്മിക്കുക.

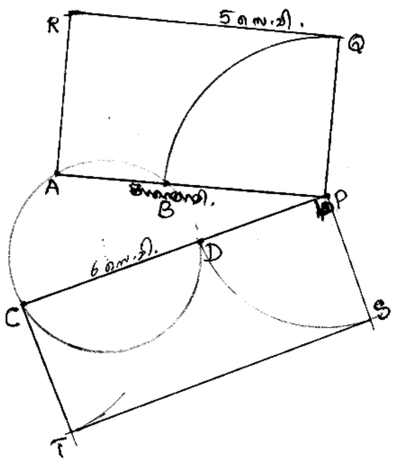
10. $\sqrt{6}$ സെ.മീ നീളമുള്ള വര വരയ്ക്കുക. ഈ വര വശമായി സമഭുജത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.



PA xPB = PC x PD ആണല്ലോ. PQ=PB യും PR = PD യും ആയാൽ ചതുരം APQS ന്റെ പരപ്പളവും ചതുരം CPRT യുടെ പരപ്പളവും തുല്യമായിരിക്കും.

ഈ ആശയം ഉപയോഗിച്ചും ഒരു ചതുരത്തിന് തുല്യ പരപ്പളവുള്ള മറ്റൊരു ചതുരം വരയ്ക്കുക

ഉദാ:- നീളം 5 സെ.മീ, വീതി 3 സെ.മീ ആയ ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പളവും നീളം 6 സെ.മീ ഉം ആയ ചതുരം വരയ്ക്കുക.



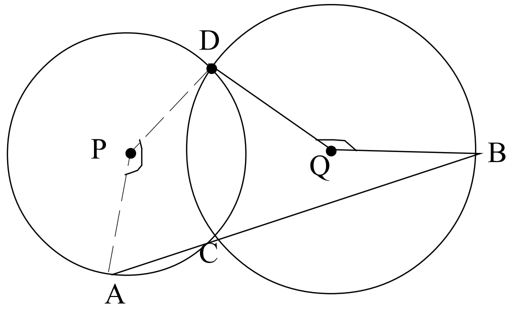
നീളം 5 സെ.മീ, വീതി 3 സെ.മീ ആയ ചതുരം APQR വരയ്ക്കുക. PB=PQ ആകത്തക്കവിധം AP യിൽ B എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. 6 സെ.മീ നീളത്തിൽ PC വരയ്ക്കുക. A,B,C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക. (△ABC യുടെ പരിവൃത്തം) ഈ വൃത്തം PCയെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദു D എന്നെടുത്താൽ PA x PB = PC x PD ആയിരിക്കുമല്ലോ.

PC യ്ക്ക് ലംബമായി Pയിൽ കൂടി ഒരു വര വരച്ച് അതിൽ PS x PD ആകത്തക്കവിധം S അടയാളപ്പെടുത്തുക. ചതുരം CPST വരയ്ക്കുക. ചതുരം APQRനും ചതുരം CPST ക്കും ഒരേ പരപ്പളവായിരിക്കുമല്ലോ?

നീളം 4 സെ.മീ, വീതി 2.5 സെ.മീ ആയ ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പളവും നീളം 5 സെ.മീ ഉം ആയ ചതുരം നിർമ്മിക്കുക.

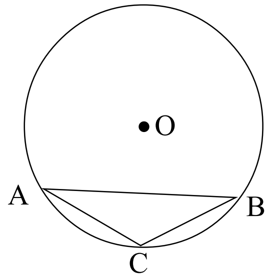
കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1) ത്രികോണം PQR ൽ. PQ= PR. QR വ്യാസമായ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവാണ് P എങ്കിൽ $\angle PQR$ എത്ര?

2) 

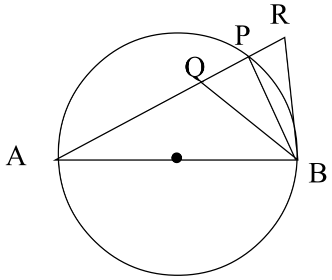
ചിത്രത്തിൽ P,Q കേന്ദ്രങ്ങളായ വൃത്തങ്ങൾ C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. A,C, B ഇവ ഒരേ വരയിലാണെങ്കിൽ < APD = < BQD എന്ന് തെളിയിക്കുക.

3) ത്രികോണം ABC യിൽ AC=BC ആണ്. AB ഞാൺ ആയി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം, AC, BC എന്നീ വശങ്ങളെ യഥാക്രമം P,Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ മുറിച്ചുകടക്കുന്നു. PC = QC എന്ന് തെളിയിക്കുക.

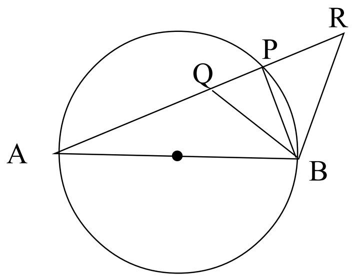
4) 

ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രം. AB യുടെ നീളം വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന് തുല്യമാണ്. < ACB കാണുക

5) ചക്രീയചതുർഭുജം ABCDയുടെ വികർണങ്ങൾ P യിൽ മുറിച്ചുകടക്കുന്നു. ത്രികോണം APB സമഭുജത്രികോണമാണെങ്കിൽ $\triangle$CPD സമഭുജത്രികോണമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

6) 

ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസമാണ്.
കൂടാതെ BQ= BR
$\angle PBR = 20^0$ ആയാൽ
$\angle ARB$, $\angle APB$, $\angle AQB$ ഇവ കാണുക.

7) 

ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസമാണ്. BQ=BR ആകുന്നു. < ARB, < APB, < AQB എന്നീ അളവുകൾ സമാന്തര ശ്രേണിയിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

8) ചതുർഭുജം $\angle$ ABCD യിൽ ആകുന്നു. $\angle A = 75^0$, $\angle B=110^0$, $< C=105^0$

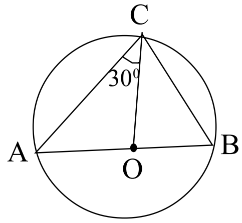
i) ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാല് മൂലകളിൽ കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ? എന്തുകൊണ്ട്?

ii) AC വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിൽ B, D എന്നീ മൂലകൾ വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ, വൃത്തത്തിൽ തന്നെയോ എന്ന് കാണുക.

വൃത്തങ്ങൾ

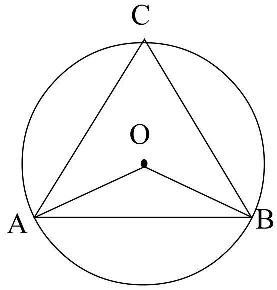
UNIT TEST

Score : 20

1) 

ചിത്രത്തിലെ വൃത്തവ്യാസം 10 സെ.മീ $\angle OCA = 30^0$ ആയാൽ BC, AC എന്നീ ഞാണുകളുടെ നീളം കാണുക. (2)

2) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വ്യാസങ്ങളായ വൃത്തങ്ങൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുമോ? എന്തുകൊണ്ട്? (2)

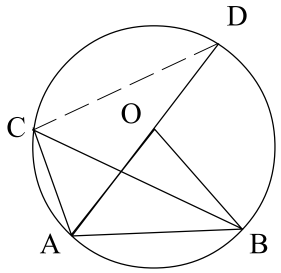
3) 

O വൃത്തകേന്ദ്രം

$\angle OAB = 40^0$ $\angle OBC = 40^0$

$\angle BAC$ എത്ര? $\angle OAC$ എത്ര? (2)

4) $7\frac{1}{2}^0$ കോൺ നിർമ്മിക്കുക. (കോൺ മാപിനി ഉപയോഗിക്കാതെ) (3)

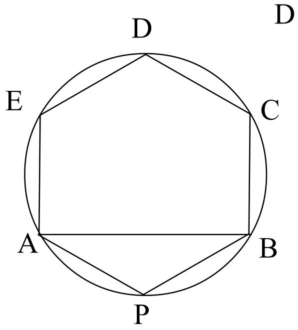
5) 

ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രം

$\angle OBA = 50^0$ $\angle OBC = 20^0$ (3)

AC വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന് തുല്യമാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

D

6) 

ABCDE ഒരു സമപഞ്ചഭുജമാണ്.

$\angle APB$ എത്ര? (2)

7) വശങ്ങൾ 6 സെ.മീ, 4 സെ.മീ ആയ ചതുരം നിർമ്മിക്കുക. അതിന് തുല്യപരപ്പളവുള്ളതും ഒരു വശം 7 സെമി ആയ മറ്റൊരു ചതുരം നിർമ്മിക്കുക. (3)

8) വശങ്ങൾ 5 സെ.മീ, 6 സെ.മീ, 7 സെ.മീ ആയ ത്രികോണം നിർമ്മിച്ച് അതിന് തുല്യപരപ്പളവുള്ള സമചതുരം നിർമ്മിക്കുക. (3)

3
സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

(1) സാധ്യത എന്ന ആശയം

(2) സാധ്യതയെ സംഖ്യാപരമായി വ്യാഖ്യാനിക്കൽ

(3) ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നങ്ങളിൽ സാധ്യതയുടെ ഉപയോഗം.

(4) സാധ്യത കണക്കാക്കുന്ന പ്രായോഗിക സന്ദർഭങ്ങളും പ്രയോഗരീതികളും.

മുന്നറിവ്

അഭാജ്യസംഖ്യകൾ, ഗുണിതങ്ങൾ, ചതുരം, ത്രികോണം, വൃത്തം എന്നിവയുടെ പരപ്പളവുകൾ, ഭിന്ന സംഖ്യകളുടെ ലഘൂകരണം തുടങ്ങിയവ.

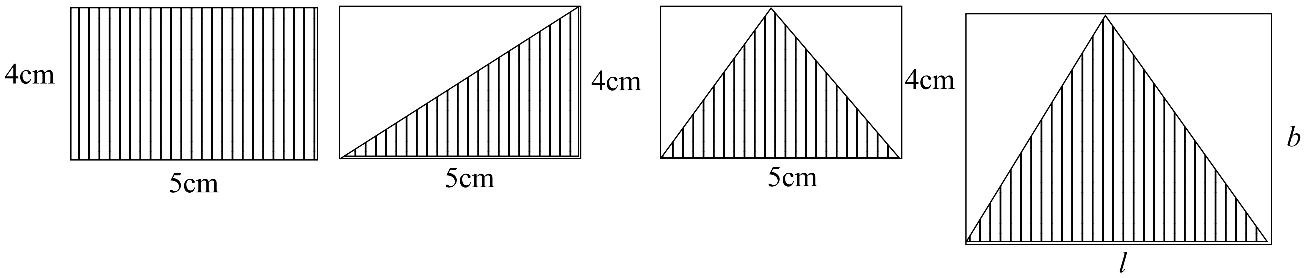
I 1) 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ എത്ര ഒറ്റസംഖ്യകളുണ്ട്? അവ ഏവ? എത്ര ഇരട്ട സംഖ്യകളുണ്ട്? അവ ഏവ?

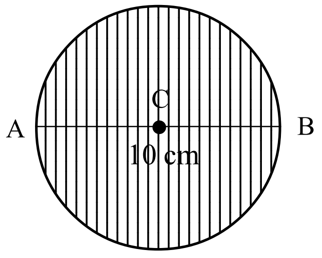
2) 20 നേക്കാൾ ചെറിയ 3ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ എത്ര എണ്ണമുണ്ട്? അവ ഏതൊക്കെ?

3)1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളും ഓരോന്നിന്റെയും എല്ലാ ഘടകങ്ങളും എഴുതുക. ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം 2 ആയ സംഖ്യകൾ വേർതിരിച്ചെഴുതുക. ഇവ അഭാജ്യ സംഖ്യകളാണ്. (1 എന്ന സംഖ്യ ഭാജ്യമോ അഭാജ്യമോ അല്ലെന്ന് സൂചിപ്പിക്കുക.)

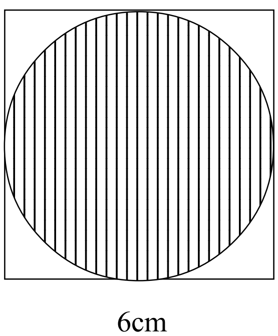
4) 1 മുതൽ 30 വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ അഭാജ്യസംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെ?

5) ഓരോ ചിത്രത്തിലും ഷെയ്ഡ് ചെയ്ത ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.





(O വൃത്തകേന്ദ്രം)



II 1)

പെട്ടി I മുത്തുകൾ	പെട്ടി II മുത്തുകൾ
4 കറുപ്പ് 6 വെളുപ്പ്	3 കറുപ്പ് 7 വെളുപ്പ്

a) ഏതെങ്കിലും ഒരു പെട്ടിയിൽ നിന്ന് കാണാതെ ഒരു മുത്ത് എടുക്കാം. കറുപ്പ് മുത്ത് വേണ്ടയാൾ ഏത് പെട്ടിയിൽ നിന്നെടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്? എന്തുകൊണ്ട്?

b) ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽ ആകെ എത്ര മുത്തുകൾ? ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്ന് ഒരു കറുപ്പ് മുത്ത് കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?

$$\text{കറുപ്പ് മുത്ത് കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത} = \frac{\text{കറുപ്പ് മുത്തുകളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ മുത്തുകളുടെ എണ്ണം}}$$

c) രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്ന് ഒരു കറുപ്പ് മുത്ത് കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എത്ര? വെളുപ്പ് മുത്ത് കിട്ടാനുള്ള സാധ്യതയോ?

2)

പന്തുകൾ പെട്ടി 1	പന്തുകൾ പെട്ടി 2	പന്തുകൾ പെട്ടി 3
നീല 2 മഞ്ഞ 1	നീല 5 മഞ്ഞ 5	നീല 4 മഞ്ഞ 7

ഒരു പെട്ടിയിൽ നിന്നും കാണാതെ ഒരു പന്തെടുക്കുന്നു.

പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക

	ആകെ പന്തുകൾ	നീലയുടെ എണ്ണം	മഞ്ഞയുടെ എണ്ണം	നീല കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത	മഞ്ഞ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത
പെട്ടി 1					
പെട്ടി 2					
പെട്ടി 3					

3) 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ഓരോന്നും ഓരോ ടോക്കണിൽ രേഖപ്പെടുത്തി ഒരു പെട്ടിയിൽ ഇടുന്നു. ഇതിൽ നിന്നും കാണാതെ ഒരു ടോക്കൺ എടുക്കുന്നു.

a) ആകെ ടോക്കണുകളുടെ എണ്ണം എത്ര ?

b) ഒറ്റസംഖ്യയുള്ള എത്ര ടോക്കണുകൾ ?

c) ഒരു ടോക്കൺ എടുക്കുമ്പോൾ ഒറ്റസംഖ്യ കിട്ടാനള്ള സാധ്യത എത്ര?

d) ഇരട്ടസംഖ്യകിട്ടാനുള്ള സാധ്യതയോ?

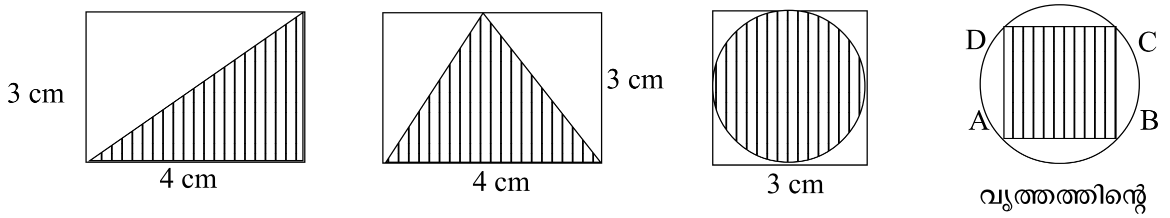
e) അഭാജ്യസംഖ്യകൾ എത്ര?

f) അഭാജ്യസംഖ്യ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എന്ത്?

g) 3ന്റെ ഗുണിതം കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?

4) ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽ കാരംബോർഡ് കോയിനുകൾ 8 എണ്ണമുണ്ട്. (3 കറുപ്പും 5 വെളുപ്പും). രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ 5 കറുത്ത കോയിനും 7 വെളുത്ത കോയിനുമാണുള്ളത്. ഒരു വെളുത്ത കോയിൻ കിട്ടാൻ ഏത് പെട്ടിയിൽ നിന്ന് എടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്?

iii) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങളിൽ ഓരോന്നിലും കണ്ണടച്ച് ഒരു കുത്തിടുന്നു എന്ന് കരുതുക. കുത്ത് ഷെയ്ഡ് ചെയ്ത ഭാഗത്ത് വീഴാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.



വൃത്തത്തിന്റെ
വ്യാസം = 6 സെ.മീ
ABCD സമചതുരം

തുടർന്ന് ഓരോ ചിത്രത്തിലും അളവുകൾ നൽകാതെ ഇതേ ചോദ്യങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുക. സാധ്യത യിൽ മാറ്റമില്ലെന്ന് തിരിച്ചറിയട്ടെ.

ജോടികൾ

IV (1) ഒരു ഹോട്ടലിൽ ചുവടെ കൊടുത്ത ഭക്ഷണങ്ങൾ ലഭ്യമാണ്.

എ	ബി
പുട്ട് ചപ്പാത്തി പത്തിരി	കടല ചെറുപയർ ബാജി

അനുവിന് ലിസ്റ്റ് എ യിൽ നിന്നും ലിസ്റ്റ് ബി യിൽ നിന്നും ഓരോ ഇനം വീതം തെരഞ്ഞെടുക്കണം. ഇത് ഏതൊക്കെ വിധത്തിലാവാം. ജോടികളായി എഴുതുക. ഉദാ: (പുട്ട്, കടല) ആകെ എത്ര ജോടി കൾ ? ജോടികളെല്ലാം എഴുതാതെ ആകെ ജോടികളുടെ എണ്ണം കാണാൻ എഴുപ്പവഴി എന്ത്?

(2) ബാബു യാത്രയ്ക്കൊരുങ്ങുമ്പോൾ 3 ഷർട്ടും 2 ജീൻസും എടുത്തുവെച്ചു.

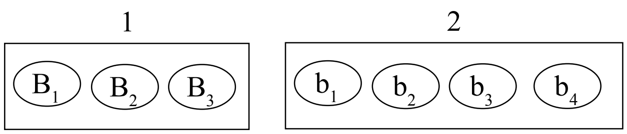
ഷർട്ട്- വെളുപ്പ്, പച്ച, വയലറ്റ്

ജീൻസ് - കറുപ്പ്, നീല

ഒരു ഷർട്ടും ഒരു ജീൻസും ചേർന്ന ഒരു ജോടി വസ്ത്രങ്ങൾ എത്ര വിധത്തിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം? അവ ഏവ?

(3) ഒരു ക്ലാസിൽ 20 ആൺകുട്ടികളും 25 പെൺകുട്ടികളുമുണ്ട്. ഒരു മത്സരത്തിൽ പങ്കെടുക്കാൻ ക്ലാസിൽ നിന്ന് ഒരു ആൺകുട്ടിയും ഒരു പെൺകുട്ടിയും ചേർന്ന ടീമിനെ തെരഞ്ഞെടുക്കണം. എത്ര വ്യത്യസ്ത വിധത്തിൽ തെരഞ്ഞെടുപ്പ് സാധ്യമാണ്?

(4) പെട്ടി I ൽ 3 നീല മുത്തുകളും പെട്ടി II ൽ 4 നീലമുത്തുകളുമുണ്ട്.



(a) ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ മുത്തുവീതം എടുക്കുന്നു. ആകെ എത്ര ജോടികൾ?

(b) ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽ 2 വെളുത്ത മുത്തും രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ 3 വെളുത്ത മുത്തും കൂടി ഇടുന്നു. ഓരോന്നിലും മുത്തുകളുടെ എണ്ണം കാണിക്കുന്ന ഡയഗ്രം വരയ്ക്കുക.

I	II
നീല 3 വെളുപ്പ് 2	നീല 4 വെളുപ്പ് 3

(c) ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽ ആകെ എത്ര മുത്തുകൾ? രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിലോ?

(d) ഓരോ പെട്ടിയിൽനിന്നും ഓരോ നീല മുത്തുവീതം എടുക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. രണ്ടും നീലയാവുന്ന എത്രജോടികൾ?

(e) ഓരോ പെട്ടിയിൽനിന്നും ഓരോ മുത്ത് വീതം കാണാതെ എടുക്കുന്നു. ആകെ എത്ര ജോടികൾ?

(f) രണ്ടു മുത്തുകളും നീലയാവാനുള്ള സാധ്യത എന്ത്?

(g) രണ്ടും വെളുപ്പ് ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്ത്?

(h) ഒന്നാമത്തേതിൽ നിന്ന് നീലയും രണ്ടാമത്തേതിൽ നിന്ന് വെളുപ്പും കിട്ടുന്ന എത്രജോടികൾ?

(i) ഒന്നാമത്തേതിൽ നിന്ന് വെളുപ്പും രണ്ടാമത്തേതിൽ നിന്ന് നീലയും കിട്ടുന്ന എത്ര ജോടികൾ?

(j) ഒരെണ്ണം മാത്രം നീലയാവുന്ന ആകെ ജോടികൾ എത്ര?

(k) ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഒരു മുത്ത് എടുക്കുമ്പോൾ ഒരെണ്ണം മാത്രം നീലയാവാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?

(l) ഒരെണ്ണമെങ്കിലും നീലയാവാനുള്ള സാധ്യതയോ?

5. ഒരു പെട്ടിയിൽ 1 മുതൽ 10 വരെ നമ്പറുകൾ ഓരോന്നും ഓരോ സ്ലിപ്പിൽ എഴുതി ഇട്ടിട്ടുണ്ട്. മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1 മുതൽ 15 വരെ നമ്പറുകളും ഉണ്ട്. ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ സ്ലിപ്പ് വീതം എടുക്കുന്നു.

(a) ആകെ സാധ്യമായ ജോടികൾ എത്ര?

(b) രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യയാവുന്ന ജോടികൾ എത്ര?

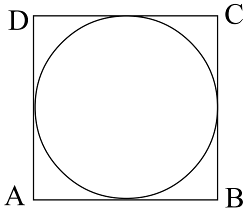
(c) രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യയാവാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?

(d) രണ്ടും ഇരട്ടസംഖ്യയാവാനുള്ള സാധ്യതയോ?

(e) ഒരെണ്ണം മാത്രം അഭാജ്യസംഖ്യയാവാനള്ള സാധ്യത എന്ത്?

(f) ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ എങ്കിലും കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?

യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റ്

1. ഒരു പെട്ടിയിൽ 3 പച്ച മുത്തുകളും 7 ചുവന്ന മുത്തുകളുമുണ്ട്. അതിൽ നിന്നും ഒരു മുത്തെടുത്താൽ അത് പച്ചയാകാനുള്ള സാധ്യത എത്ര? ചുവന്നതാവാനോ?
2. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 4 വെളുത്ത പന്തും 5 കറുത്ത പന്തുമുണ്ട്. മറ്റൊരു സഞ്ചിയിൽ 3 വെളുത്ത പന്തും 4 കറുത്ത പന്തുമുണ്ട്. ഒരാൾക്ക് ഒരു കറുത്ത പന്ത് വേണം. ഏത് സഞ്ചിയിൽ നിന്നെടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്? എന്തുകൊണ്ട്?
3. 10 എ ക്ലാസിൽ 15 ആൺകുട്ടികളും 25 പെൺകുട്ടികളുമുണ്ട്. 10 ബിയിൽ 20 ആൺകുട്ടികളും 15 പെൺകുട്ടികളുമാണുള്ളത്. ഓരോ ക്ലാസിൽ നിന്നും ഓരോ കുട്ടിയെ തെരഞ്ഞെടുക്കണം.
   a) രണ്ടും ആൺകുട്ടികളാകാനള്ള സാധ്യത എത്ര?
   b) രണ്ടും പെൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?
   c) ഒരു ആൺകുട്ടിയും ഒരു പെൺകുട്ടിയുമാകാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?
4. 

   ABCD ഒരു സമചതുരമാണ്. ഈ സമചതുരത്തിൽ കണ്ണടച്ച് ഒരു കുത്തിട്ടാൽ വൃത്തത്തിനകത്താവാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?
5. ഒരു കൂട്ടയിൽ 20 പച്ചമാങ്ങയും 30 പഴുത്ത മാങ്ങയുമുണ്ട്. മറ്റൊരു കൂട്ടയിൽ 25 പച്ചമാങ്ങയും 35 പഴുത്ത മാങ്ങയുമുണ്ട്. ഓരോ കൂട്ടയിൽ നിന്നും ഓരോ മാങ്ങ വീതം എടുക്കുന്നു. ഒരു പഴുത്ത മാങ്ങയെങ്കിലും കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?

4
രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ രൂപീകരണം
- രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യം ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങളുടെ പരിഹാരം.
- രണ്ട് പരിഹാരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ
- വർഗത്തികവ്
- സമവാക്യങ്ങളും ബഹുപദങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം
- $ax^2 + bx + c = o$ ആണെങ്കിൽ $x = \frac{-b+\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

മുന്നറിവ്

സമവാക്യങ്ങളെക്കുറുച്ചുള്ള ധാരണ

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

$x^2 - a^2 = (x+ a) (x - a)$

ചുറ്റളവ്, പരപ്പളവ് (ചതുരം, സമചതുരം, ത്രികോണം മുതലായവ)

ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ലഘൂകരണം

പൈത്തഗോറസ് സിദ്ധാന്തം.

പ്രവർത്തനം-1

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഭാഷാവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും ഗണിത വാക്യങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുക.

1. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 81 ച.സെ.മീ ആകുന്നു.
2. ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തിനോട് 6 കൂട്ടിയാൽ 150 കിട്ടുന്നു.
3. ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്ന് 5 കുറച്ച് വർഗം കണ്ടപ്പോൾ 16 ലഭിച്ചു.
4. ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വീതി നീളത്തെക്കാൾ 4 സെമി കുറവായാൽ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 165 ച. സെ.മീ ആണ്.
5. തുടർച്ചയായ രണ്ട് ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക 74 ആകുന്നു.
6. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം അതിന്റെ പാദത്തിന്റെ രണ്ട് ഇരട്ടിയേക്കാൾ 1 സെ.മി കൂടുതലാണ്. മൂന്നാമത്തെ വശം പാദത്തിനേക്കാൾ 7 സെ.മീ കൂടുതലുമാണ്.
7. ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യയുടെ 5 മടങ്ങ് അതിന്റെ വർഗത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങിനേക്കാൾ 2 കൂടുതലാണ്.
8. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ പൊതുവിത്യാസം 2 ആണ്. ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തോട് 1 കൂട്ടിയപ്പോൾ 121 ലഭിച്ചു.
9. 40 സെ.മി ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 75 ച.സെ.മീ ആണ്.
10. ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക $\frac{26}{5}$ ആകുന്നു.

ഗണിതവാക്യത്തിന് സഹായകമാകുന്ന ഏതാനും സൂചനകൾ

തുടർച്ചയായി രണ്ട് എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ	:	$x, x+1$
തുടർച്ചയായ രണ്ട് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ	:	$x, x+2$
തുടർച്ചയായ രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകൾ	:	$x, x+2$
ഒരു സംഖ്യയും അതിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങും	:	$x, 2x$
ഒരു സംഖ്യയും അതിന്റെ വർഗവും	:	x, x^2
ഒരു സംഖ്യയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമവും	:	$x, \frac{1}{x}$
തുക 8 ആയ രണ്ട് സംഖ്യ	:	$x, 8-x$
രണ്ട് സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യാസം 5	:	$x, x+5$
ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 40 എങ്കിൽ നീളം + വീതി	:	20
നീളം, വീതി	:	$x, 20-x$
സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദം	:	x
പൊതുവിത്യാസം d എങ്കിൽ തുടർച്ചയായ രണ്ട് പദങ്ങൾ	:	$x, x+d$

പ്രവർത്തനം-2

കോളം A യിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഭാഷാവാക്യത്തിന് യോജിച്ച രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യം കോളം B യിൽ നിന്ന് എടുത്തെഴുതുക.

A	B
i) ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യയുടെ വർഗം 64 ആണ്.	*a)* $x^2+3x=64$
ii) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെ.മീ വർദ്ധിപ്പിച്ചപ്പോൾ പരപ്പളവ് 64 ചതുരശ്ര സെ.മി ആയി.	*b)* $x^2+2x=48$
iii) ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിൽ നിന്ന് അതേ സംഖ്യയുടെ 3 മടങ്ങ് കുറച്ചാൽ 40 ലഭിക്കും.	*c)* $x^2+6x=40$
iv) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം വീതിയെക്കാൾ 6 സെ.മീ കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 40 ച.സെ.മി	*d)* $(x+3)^2=64$ *e)* $x^2-3x=40$
v) ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിനോട് സംഖ്യയുടെ രണ്ട് മടങ്ങ് കൂട്ടിയാൽ 48 കിട്ടും.	*f)* $x^2=64$

പ്രവർത്തനം-3

ചുവടെ കൊടുത്ത സമവാക്യങ്ങളിൽ x ന്റെ വില കാണുക. (x - എണ്ണൽ സംഖ്യകളാണ്)

1. $x^2 = 49$ → സൂചന $x = \sqrt{49}$
2. $3x^2 = 75$
3. $\frac{1}{2} x^2 = 72$
4. $x^2 + 1 = 50$
5. $x^2 + 5 = 86$
6. $x^2 - 3 = 118$

7. $2x^2 + 1 = 73$ → സൂചന $2x^2 = 73-1, x^2 = 72 \div 2, x = \sqrt{}$ .... =.........

8. $(x + 1)^2 = 121$

9. $(x+4)^2 = 169$

10. $(x - 3)^2 = 49$

11. $(x - 8)^2 = 225$

12. $(2x + 1)^2 = 81$

13. $(3x+ 2)^2 = 196$

14. $x^2 +2x + 1 = 100$ → $(x + 1)^2 = 10^2$; $x + 1 = 10$, $\therefore$ $x =$ ....

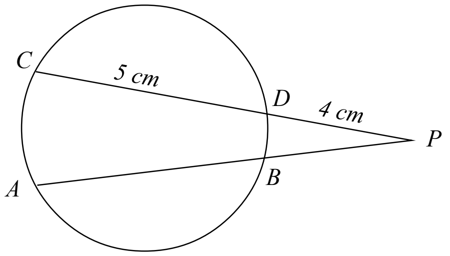
15. $x^2 +10x + 25 = 121$

16. $4x^2 +28x + 49 = 289$

പ്രവർത്തനം-4

രണ്ടംകൃതി സമവാക്യം രൂപീകരിച്ച് പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കാണുക,

1. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 625 ച.സെ.മി ആയാൽ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമെന്ത്?
2. 3 സമചതുരങ്ങൾ ചേർത്ത് വെച്ച് ഒരു ചതുരം ഉണ്ടാക്കുന്നു. ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 108 ച.സെ.മി ആണെങ്കിൽ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം കാണുക.
3. ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിനോട് 10 കൂട്ടിയപ്പോൾ 586 ആകുന്നു. സംഖ്യ ഏത്?
4. തുടർച്ചയായ രണ്ട് ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിനോട് 4 കൂട്ടിയപ്പോൾ 256 ലഭിച്ചു. സംഖ്യകൾ ഏവ?
5. ജെൻസന് ലാലുവിനേക്കാൾ 4 വയസ്സ് കൂടുതലുണ്ട്. അവരുടെ വയസ്സുകളുടെ ഗുണനഫലത്തിനോട് 4 കൂട്ടിയാൽ 169 കിട്ടും. എങ്കിൽ ഓരോരുത്തരുടെയും വയസെത്ര?
6. ചിത്രത്തിൽ *AB, CD* എന്നീ ഞാണുകൾ *P* എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നു. *CD= 5* സെ.മി, *PD= 4* സെ.മി *PB* യുടെ നീളത്തിന്റെ മൂന്ന് മടങ്ങാണ് *AB* യുടെ നീളമെങ്കിൽ *PB* എത്ര?



7. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പാദത്തിനേക്കാൾ 2 സെ.മീ കൂടുതലാണ് ലംബവശം. കർണം പാദത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങിനേക്കാൾ 2 സെ.മി കുറവുമാണ്. എങ്കിൽ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക.
8. 4, 7, 10 .... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ എത്രാമത്തെ പദത്തിന്റെ വർഗമാണ് 1600?
9. സമചതുരാകൃതിയായ ഒരു മൈതാനത്തിന് ചുറ്റും 2 മീറ്റർ വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ട്. മൈതാനവും പാതയും ചേർന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 900 ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. മൈതാനത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്.
10. 400 രൂപയ്ക്ക് രണ്ട് വർഷം കഴിയുമ്പോൾ കൂട്ടുപലിശയടക്കം 441 രൂപ ലഭിച്ചു. എങ്കിൽ പലിശനിരക്ക് എത്രയാണ്.

രണ്ട് പരിഹാരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ

ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയപ്പോൾ 50 ലഭിക്കുന്നു എങ്കിൽ സംഖ്യ ഏത് ?

വിപരീത ക്രിയ ചെയ്യുമ്പോൾ

സംഖ്യയുടെ വർഗം 49 എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

49ന്റെ വർഗമൂല്യം 7, -7 എന്നിവയാണ്. ഈ പ്രശ്നത്തിന് രണ്ട് പരിഹാരം ലഭിക്കുന്നു. ബീജഗണിത രീതിയിൽ പരിഹാരം കാണുകയാണെങ്കിൽ

സംഖ്യ = x

$x^2 + 1 = 50$

$x^2 = 49$

$x = \sqrt{49} = {}^{+}7, {}^{-}7$

പരിഹാരം കാണുക.

1) ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ചതിന്റെ വർഗം 100 ആണ്. എങ്കിൽ സംഖ്യ ഏത്?

2) ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിന്റെ 5 മടങ്ങിൽ നിന്ന് 3 കുറച്ചാൽ 77 ലഭിക്കുന്നു. സംഖ്യ ഏത്?

വർഗത്തികവ്

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ

$a = 3$ ആയാൽ $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2$

$a = 4$ ആയാൽ $(x + 4)^2 = x^2 + 2 \times 4 \times x +$ ....

$a = 5$ ആയാൽ $(x + 5)^2 = x^2 + 10x +$ ....

പ്രവർത്തനം -5

തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളെ പൂർണവർഗമാക്കുന്ന വിധത്തിൽ വിട്ടഭാഗം പൂരിപ്പിക്കുക.

i) $x^2 + 12x +$ ....

ii) $x^2 + 2x +$ ....

iii) $x^2 + 5x +$ ....

iv) $x^2 - 10x +$ .... സൂചന : $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$

v) $x^2 - 16x +$ ....

vi) $x (x + 6)$ .... സൂചന : $x (x+6) = x^2 + 6x$

നീളം വീതിയേക്കാൾ 6 സെ.മീ കൂടുതലായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 55 ച.സെ.മി ആയാൽ വീതിയെന്ത്?

വീതി x ആയാൽ

നീളം= ....

പരപ്പളവ് $(x + 6) x = 55$

$x^2 + 6x = 55$

വർഗം പൂർത്തീകരിച്ചാൽ

$x^2 + 6x +$ .... $= 55 +$ ....

$(x + 3)^2 = 64$

$x + 3 = 1$ ....

$x = +$ .... അല്ലെങ്കിൽ - ....

x ന് രണ്ട് വില ലഭിക്കുന്നുവെങ്കിലും പ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരം ഏത്? എന്തുകൊണ്ട്?

പ്രവർത്തനം -6

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കാണുക.

i) $x^2 + 4x = 21$

ii) $x^2 - 8x = 65$

iii) $x^2 + 5x = {}^-4$

iv) $x(x + 6) = 72$

v) $x(x + 7) = 60$

vi) $2x^2 - 7x = 4$

<u>രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങളും ബഹുപദങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം</u>

ഉദാ:- $p(x) = x^2 + 6x + 9$

$p(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 9$

$= 9 - 18 + 9$

$= 0$

$\therefore P(-3) = 0$

$x^2 + 6x + 9 = 0$ ന്റെ പരിഹാരം കാണുക.

$x^2 + 6x = -9$

$x^2 + 6x + \ldots\ldots\ldots\ldots = -9 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x + 3)^2 = 0$

$\therefore x + 3 = 0$

$x = -3$

അതായത് $P(x) = 0$ കിട്ടാൻ $x = {}^-3$ എന്നെടുക്കണം.

$P(x) = 1$ ആകുന്നു. x കാണുന്നതെങ്ങിനെ?

$P(x) - 1 = 0$, $x^2 + 6x + 9 - 1 = 0$

ഇത് $x^2 + 6x + 8 = 0$

$x^2 + 6x + 8$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ

$q(x)$ എന്നെഴുതിയാൽ

$q(x) = 0$ ലഭിക്കാൻ x ന് ഏത് വില നൽകേണ്ടിവരും.

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$x^2 + 6x = -8$

$x^2 + 6x + 9 = -8 + 9$

$(x+3)^2 = 1$

$x + 3 = \pm 1$

$x = +1 - 3 \qquad x = -1 - 3$

$= -2 \qquad\qquad = -4$

$q(x) = 0$ ആകാൻ $x = -2$, $x = -4$ വില നൽകേണ്ടിവരും.

എങ്കിൽ $ax^2 + bx + c = 0$ ലഭിക്കാൻ

x ന് പകരം $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ എന്നെടുക്കേണ്ടിവരും.

പ്രവർത്തനം -7

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിലും x ഏതൊക്കെ സംഖ്യയെടുത്താലാണ്. പൂജ്യം കിട്ടുക.

a) $x^2 - 5x + 4$

b) $x^2 - x - 12$

c) $x^2 + x - 30$

d) $9x^2 + 12x + 4$

$ax^2 + bx + c = o$ എന്ന ബഹുപദ സമവാക്യത്തിന്റെ x വില $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ എന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം.

പ്രവർത്തനം -8

ബഹുപദസമവാക്യം രൂപീകരിച്ച് x ന്റെ വില കാണാം.

i) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12}$

ii) $x^2 + (x+1)^2 = 313$

iii) $\frac{n(n+2)}{2} = 210$

iv) $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$

v) $\frac{600}{x} + 12 = \frac{600}{x-5}$

vi) $2n^2 + n = 300$

vii) $x + \frac{1}{x} = \frac{25}{2}$

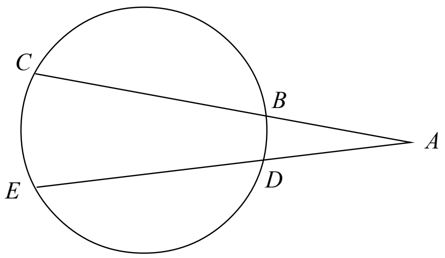
viii) $(50 + 2x)(40 + 2x) = 2475$

ix) $(30 - 2x)(20 - 2x) = 416$

x) $x^2 + (x - 7)^2 = (x+2)^2$

യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റ്

1. 14, 18, 22, 26, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ 270 കിട്ടും ?
2. ചിത്രത്തിൽ $AB=$ 8 സെ.മി, $BC=$ 10 സെ.മീ, DE = 7 സെ.മീ $AD=$ എത്ര?



3. ഒരു കാർ 300 കി.മീ ദൂരം സഞ്ചരിച്ചു. ഇതേ കാർ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 10 കി.മീ വർദ്ധിപ്പിച്ചിരുന്നുവെങ്കിൽ 1 മണിക്കൂർ നേരത്തെയെത്തുമായിരുന്നു. കാറിന്റെ വേഗത കണക്കാക്കുക.
4. ഒരു ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 60 ച.സെ.മീ ആണ്. അതിന്റെ നീളം 3 സെ.മി കുറയ്ക്കുകയും വീതി 1 സെ.മീ കൂട്ടുകയും ചെയ്താൽ സമചതുരം കിട്ടും. എങ്കിൽ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും എത്ര?
5. 70 സെ.മീ നീളമുള്ള കമ്പി വളച്ച് ചതുരം ഉണ്ടാക്കുന്നു. അതിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം 25 സെ.മീ ആണെങ്കിൽ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും കാണുക.
6. ഗണിത ക്ലബ്ബിലെ കുട്ടികളിൽ ഓരോ കുട്ടിയും പരസ്പരം പുതുവത്സര ആശംസാ സന്ദേശങ്ങൾ അയക്കുന്നു. മൊത്തം 240 സന്ദേശങ്ങൾ അയച്ചുവെങ്കിൽ ആ ക്ലബ്ബിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം എത്ര ?
7. ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക $2\frac{4}{15}$ ആയാൽ സംഖ്യയെത്ര?
8. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ചെറിയ 2 വശങ്ങളുടെ തുക 41 സെ.മീ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 210 ച.സെ.മി. ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളും കാണുക.

****

5
ത്രികോണമിതി

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

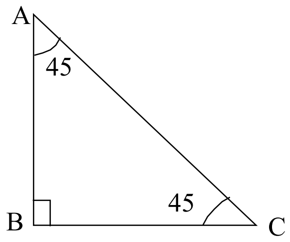
- ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.
- ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ അതിലെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം നിശ്ചയിക്കുന്നു.
- ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏത് ഞാണിന്റെയും നീളം കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയുടെ സൈനിനെ ആരം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങാണ്.
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം അവയുടെ എതിർ കോണുകളുടെ സൈൻ അളവുകളുടെ അംശബന്ധമാണ്.
- ഒരു കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ സമീപവശം കൊണ്ട് ഹരിച്ചുകിട്ടുന്നതാണ് ആ കോണിന്റെ ടാൻജെന്റ് എന്ന ആശയം.
- അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളും ത്രികോണമിതിബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് കാണാൻ കഴിയുന്നു.

മുന്നറിവ്

- പൈതഗോറസ് തത്വം
- ത്രികോണപരപ്പളവ് = ½ bh
- സാമാന്തരീകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = വശം x ഉയരം
- ചാപം കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാകുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ് മറു ചാപത്തിലുണ്ടാകുന്ന കോൺ.
- ഒരു ചാപത്തിലെ കോണും മറു ചാപത്തിലെ കോണും അനുപൂരകം.

കോണുകളും വശങ്ങളും

- കോണുകൾ 45^0, 45^0, 90^0, ആയ ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം വശങ്ങൾ $1:1:\sqrt{2}$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

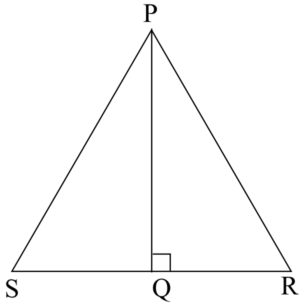


AB = 1 യൂണിറ്റ് ആയാൽ BC =1 യൂണിറ്റ് തന്നെ.
അപ്പോൾ AC = $\sqrt{2}$ യൂണിറ്റ് എന്ന് കിട്ടുമല്ലോ.
AB : BC : AC = $1:1:\sqrt{2}$

- ചുവടെ കൊടുക്കുന്ന പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക.

കോൺ 45^0	കോൺ 45^0	കോൺ 90^0
എതിരെയുള്ള വശം AB	എതിരെയുള്ള വശം BC	കർണം AC
5 സെ.മീ	....	....
....	10 സെ.മീ	....
....	....	$15\sqrt{2}$ സെ.മി
....	....	15 സെ.മീ
x സെ.മീ	....	....

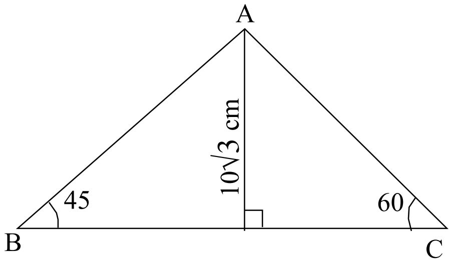
- കോണുകൾ 30^0, 60^0, 90^0 ആയ ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം വശങ്ങൾ $1 : \sqrt{3} : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.



Δ PSR ഒരു സമഭുജ ത്രികോണം.
അതിനാൽ Δ PQR ൽ $< Q = 90, < R = 60, < P = 30^0$
PR = 2 യൂണിറ്റ് ആയാൽ QR = 1 യൂണിറ്റ്
അപ്പോൾ PQ = $\sqrt{3}$ യൂണിറ്റ് ആകുമല്ലോ.
$RQ : QP : PR = 1 : \sqrt{3} : 2$

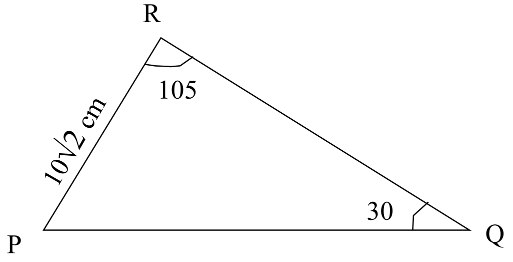
- ചിത്രത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ചുവടെയുള്ള പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക.

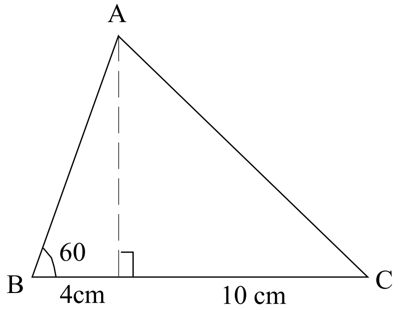
PQ	QP	PR
2 സെ.മീ	....	....
....	$3\sqrt{3}$ സെ.മി	....
....	....	8 സെ.മീ
....	9 സെ.മീ	....
x സെ.മീ	....	....

- 

Δ ABC യുടെ കോണുകൾ എഴുതുക.
വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ കാണുക.

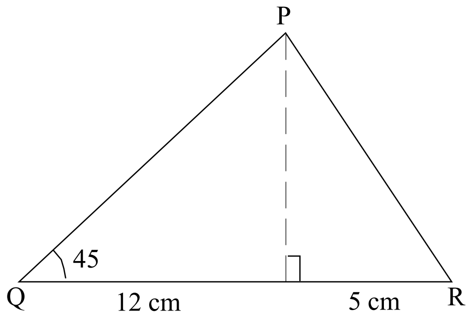
- ത്രികോണം PQR ന്റെ മറ്റുവശങ്ങളുടെ നീളം കാണുക.



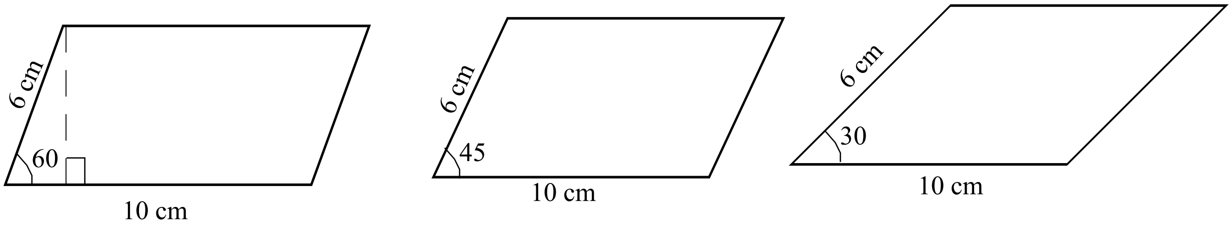
- 

ത്രികോണം ABC യുടെ പരപ്പളവ് കാണുക.

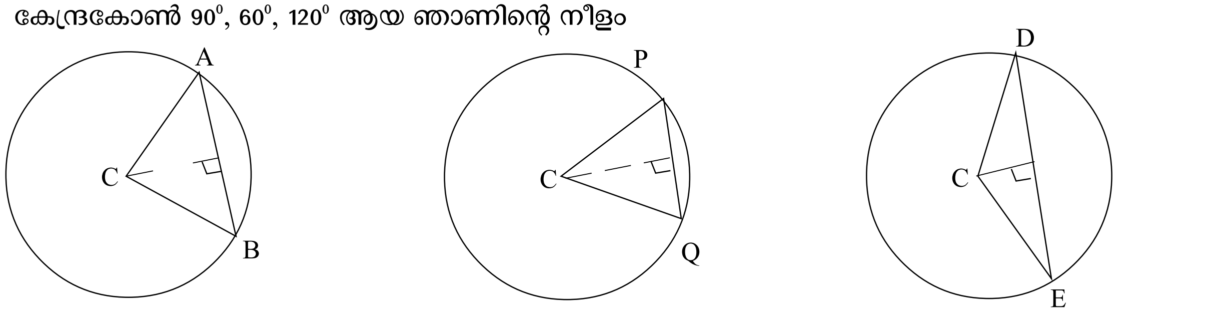
- ത്രികോണം PQR ന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.



- ചിത്രത്തിലുള്ള ഓരോ സാമാന്തരീകത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കാണുക.



- കേന്ദ്രകോൺ 90^0, 60^0, 120^0 ആയ ഞാണിന്റെ നീളം



എല്ലാ വൃത്തങ്ങളുടെയും ആരം 12 സെ.മീ

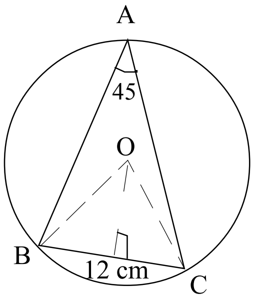
AB യുടെ കേന്ദ്രകോൺ 90^0, AB യുടെ നീളം കാണുക

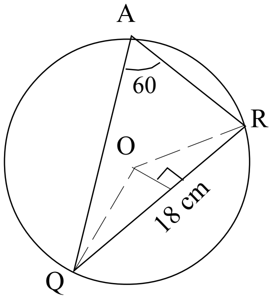
PQ ന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 60^0, PQ ന്റെ നീളം കാണുക

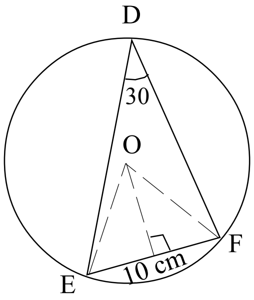
DE യുടെ കേന്ദ്രകോൺ 120^0, DE യുടെ നീളം കാണുക

(45^0, 45, 90 ; 30, 60, 90 കോണളവുകളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ ബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക)

- ത്രികോണത്തിലെ ഒരു കോണും, എതിർവശവും, പരിവൃത്ത ആരവും.





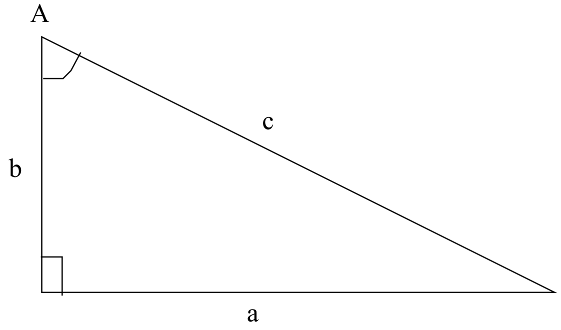


ഓരോന്നിലും തന്നിരിക്കുന്ന അളവ് ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം ABC, PQR, DEF എന്നിവയുടെ പരിവൃത്ത ആരം കാണുക.

(45, 45, 90 ; 30, 60, 90 കോണളവുകളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം ഉപയോഗിക്കുക.)

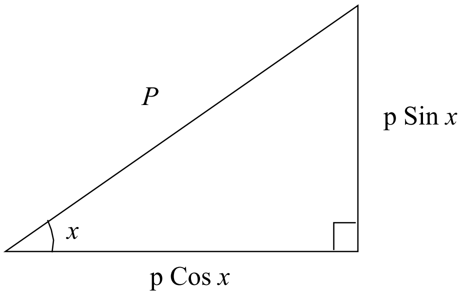
- Sine, Cosine എന്നീ ആശയങ്ങൾ

കോണിന്റെ Sine = $\frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണം}}$, കോണിന്റെ Cosine = $\frac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണം}}$



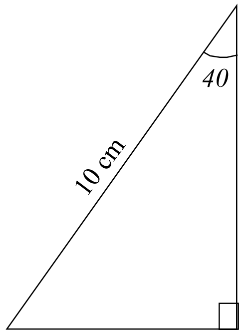
Sine A = $\frac{a}{c}$, Cos A = $\frac{b}{c}$

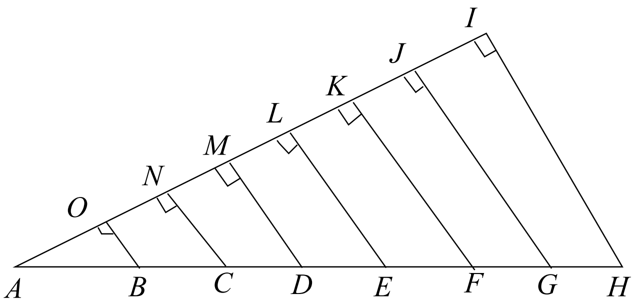
$\therefore$ a = c x Sin A, b= c.Cos A



ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോണിന്റെ എതിർവശം ആ കോണിന്റെ Sin വിലയെ കർണം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതും, സമീപവശം ആ കോണിന്റെ Cos വിലയെ കർണം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതുമാണ്.

- ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഒരു കോൺ 40^0, കർണം 10 സെ.മീ എങ്കിൽ മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളം കാണുക.



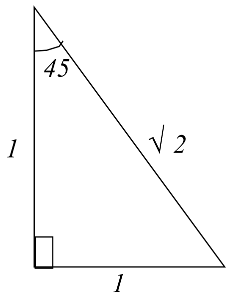
- 

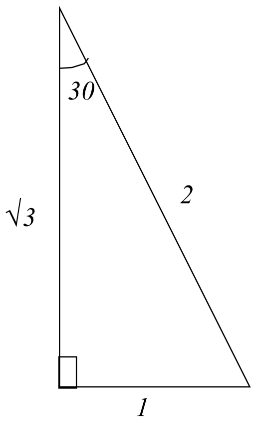
AH എന്ന വരയിൽ ഓരോ സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിൽ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി. *AI* എന്നവരയിലേക്ക് ആ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ലംബങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. $< A = 20^0$ എങ്കിൽ

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ നീളം കാണുക.

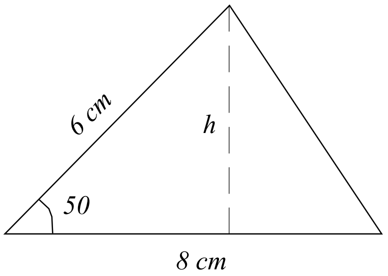
HI = ... ; *AI* = ...
GK = ... ; *AJ*= ....
FK= .... ; *AK* = ...
EL = ... ; *AL* = ...
DM = ... ; *AM* = ...
CN = ... ; *AN* = ...
BO = ... ; *AO* = ...

- *Sin 45* = ... *Cos 45*= ....
  Sin 30 = ... *Cos 30*= ....
  Sin 60 = ... *Cos 60*= ....
  (ചിത്രം ഉപയോഗിക്കുക)





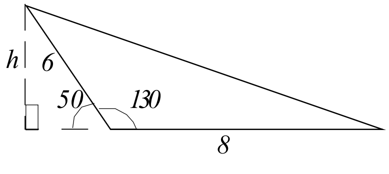
- ത്രികോണപരപ്പ്



h = 6 x *sin 50 = 6* x *0.766 = 4.596*
പരപ്പളവ് = *½* x *8* x*4.596 - 4* x *4.596 - 18.384* ച.സെ.മീ

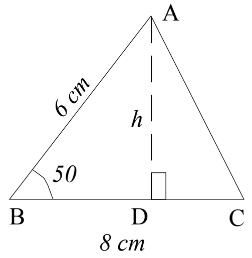
6 സെ.മീ വശത്തിലേക്ക് ലംബം വരച്ച് പരപ്പളവ് കാണുന്നതും പരിശീലിപ്പിക്കുക.

- ഇതേ ത്രികോണത്തിൽ 50^0 കോണിന് പകരം 130^0 കോൺ ആയാൽ പരപ്പളവ് മാറുന്നില്ല എന്ന് ബോധ്യപ്പെടുത്തണം.



h= *6* x *Sin 50 = 4.596*
പരപ്പളവ *½* x *8* x *4.596 = 18.384* ച.സെ.മീ

- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ 10 സെ.മീ, 6 സെ.മീ ഉം ഉൾകോൺ 40^0 ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക. കോണിന്റെ അളവ് 140^0 ആയാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക. വശങ്ങൾ 10 സെ.മീ, 6 സെ.മീ, ഒരു കോൺ 70^0 ആയ സാമാന്തരീകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം വശം



$h = 6 \times \sin 50 = 4.596 = 4.60$

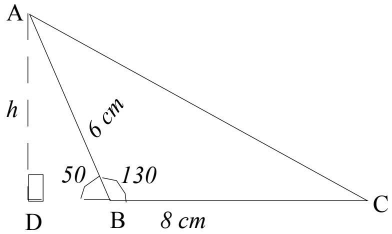
$BD = 6 \times \cos 50 = 6 \times 0.6428 = 3.86$

$DC = 8 - 3.86 = 4.14$

$AC^2 = h^2 + DC^2 = 4.6^2 + 4.14^2$

$AC = \sqrt{4.6^2 + 4.14^2}$

$< B = 130^0$ ആയാൽ



$h = 6 \times \sin 50 = 4.60$

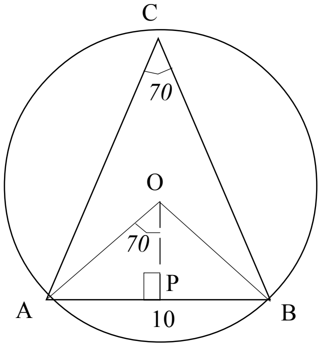
$BD = 6 \times \cos 50 = 3.86$

$DC = 8 + 3.86 = 11.86$

$AC^2 = h^2 + DC^2 = 4.6^2 + 11.86^2$

$AC = \sqrt{4.6^2 + 11.86^2}$

- വശങ്ങൾ 10 സെ.മീ, 8 സെ.മീ ഉൾകോൺ 40^0 ആയാൽ മൂന്നാം വശം കാണുക. ഉൾകോൺ 140^0 ആയാൽ മൂന്നാം വശം കാണുക.
- ഒരു സാമാന്തരീകത്തന്റെ വശങ്ങൾ 10 സെ.മി, 6 സെ.മീ ഒരു കോണിന്റെ അളവ് 70^0 ആയാൽ അതിന്റെ രണ്ടു വികർണങ്ങളുടെയും നീളം കാണുക.
- ത്രികോണത്തിന്റെ കോണും എതിർവശവും പരിവൃത്തആരവും



$< ABC$ ൽ $< C = 70$, എതിർവശം $AB = 10$ സെ.മി

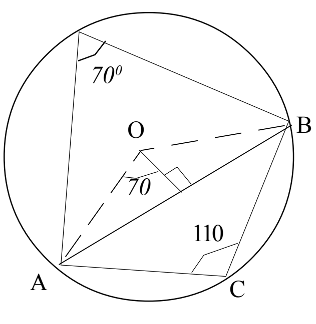
OAB സമപാർശ്വ ത്രികോണം.

$\therefore < AOB = 140 \quad < AOP = 700$

$AP = 5, \therefore \frac{OA}{\sin 70} = \frac{AP}{\sin 70} = 5 = ...$

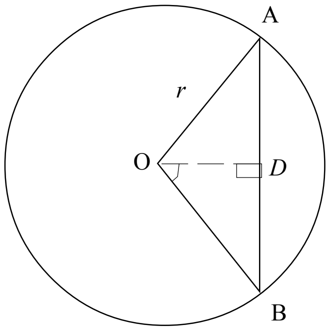
$OA = \frac{AP}{\sin 70} = \frac{5}{\sin 70} = ...$

- 70^0 കോണിന് പകരം 110^0 ആയാൽ പരിവൃത്ത ആരം മാറുന്നില്ല.



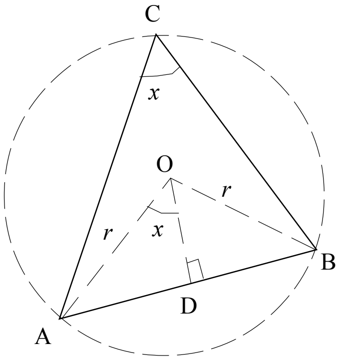
70^0, 90^0, 20^0 കോണുള്ള ത്രികോണം കിട്ടുന്നു.
കർണമാണ് ആരം.
അതിനാൽ മുകളിലുള്ളപോലെ
ആരം = $\frac{5}{\sin 70}$ തന്നെ.

- ഞാണും കേന്ദ്രകോണും



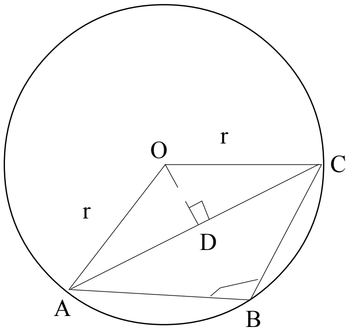
ആരം r, ഞാൻ AB യുടെ കേന്ദ്രകോൺ $AOB = C$
$< AOD = < BOD = \frac{C}{2}$ ആയാൽ
$AB = 2r \sin \frac{C}{2}$ ആകുന്നു.

- ത്രികോണത്തിന്റെ വശവും കോണും



AB യുടെ കേന്ദ്രകോൺ $2x$ $\therefore < AOD = BOD = x$
$AB = 2r \sin x$ എന്ന് കിട്ടുമല്ലോ.
അതിനാൽ വശം $AB = 2r. \sin x$
ഇതിൽ നിന്ന് ABC ൽ AB x 2 x Sin C
$BC = 2$ x ആരം x Sin A
$AC = 2$ x ആരം Sin B

- ΔABC ൽ $< B$ 90 ൽ കൂടുതൽ



$< AOC = (180 - < B)$ x 2
$\therefore AB$ യുടെ കേന്ദ്രകോൺ $= (180 - < B)$ x 2
$\therefore AOD = ½ < AOC = 180 - < B$
$\therefore AC = 2r \sin (180 - < B$

- ΔABC യുടെ പരിവൃത്തആരം r ആയാൽ

$AB = 2r \sin C, BC = 2r \sin A, AC = 2r \sin B$

അതിനാൽ $AB : BC : AC = \sin C : \sin A : \sin B$ ആകുമല്ലോ.

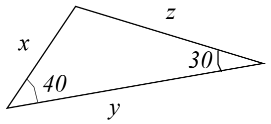
ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം അവയുടെ എതിർകോണുകളുടെ സൈൻ അളവുകളുടെ അംശബന്ധമാണ്. ഏതെങ്കിലും ഒരു കോൺ മട്ടത്തിനേക്കാൾ വലുതാണെങ്കിൽ അതിന്റെ അനുപൂരക കോണിന്റെ സൈൻ എടുക്കണം. മട്ടമാണെങ്കിൽ എതിർവശം 1 ആയി എടുക്കണം.

ചോദ്യങ്ങൾ

1. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം 10 സെ.മീ. അതിന്റെ എതിർകോൺ 70^0 ആയാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്ത ആരമെത്ര?
2. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം 10 സെ.മീ. അതിന്റെ എതിർകോൺ 100^0 ആയാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തആരമെത്ര?
3. ΔABC ൽ $< A = 80^0$, $< C = 70^0$, ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്ത വ്യാസം 20 സെ.മീ ആയാൽ AB, BC, AC എന്നിവയുടെ നീളം കാണുക.
4. 15 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിലാണ് ഒരു സമപഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ എങ്കിൽ വശത്തിന്റെ നീളം എന്ത്?

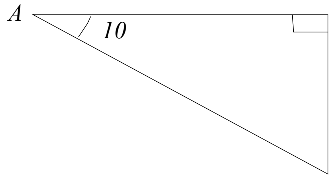
   (ഞാണിന്റെ നീളം = $2r \sin \frac{c}{2}$ എന്ന ബന്ധം ഉപയോഗിക്കുക.)
5. 20 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ കേപ്രകോൺ 100^0 ആയ ഞാണിന്റെ നീളമെത്ര?

6.



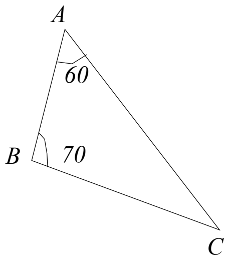
$x : y : z$ കാണുക.

7.



വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം എന്ത് ?

8.



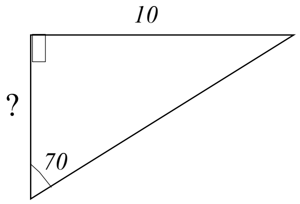
$AB = ?$
$AC = ?$

മറ്റൊരളവ് Tangent

- ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഒരു കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ സമീപവശം കൊണ്ട് ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണ് ആ കോണിന്റെ *tan* വില.

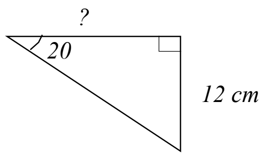
  കോണിന്റെ *tan* വില = $\frac{\text{എതിർവശം}}{\text{സമീപവശം}}$ $\therefore$ $\tan 45 = 1, \tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan 60 = \sqrt{3}$

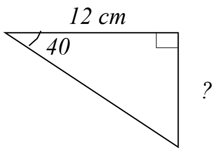
  tan വിലയുടെ പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് പരിഹാരം കാണുക.

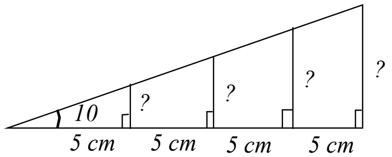
- 

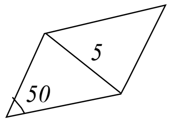
  $\tan 70 = \frac{10}{?}$ $\therefore$? $\frac{10}{\tan 70} = \frac{10}{2.7475} = ...$

- മറ്റുള്ള ചോദ്യങ്ങൾ ഇതുപോലെ ചെയ്യുക.

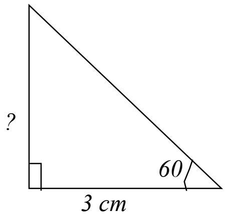


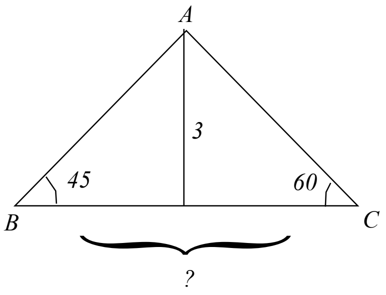


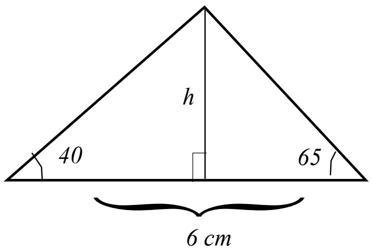
- 

- 

ചെറിയ വികർണം 5 സെ.മി. ഒരു കോൺ 50^0 ആയ സമഭുജസാമാന്തരീകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

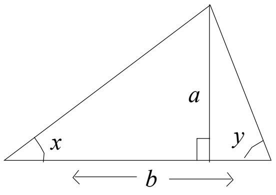
- 



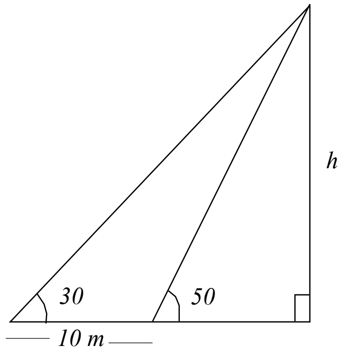


$h = ?$

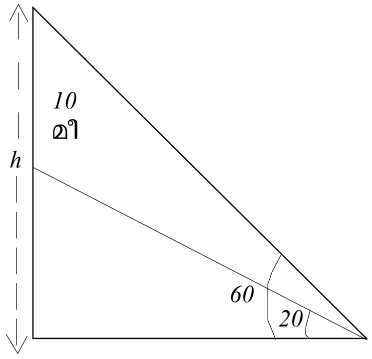
സൂചന : $\frac{h}{\tan 40} + \frac{h}{\tan 65} = 6$

- 

$\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} = \frac{b}{a}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

- 

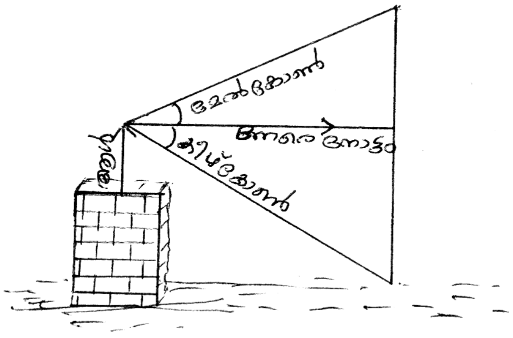
രണ്ട് ചിത്രത്തിലും h ന്റെ വിലകാണുക



അകലം, ഉയരം

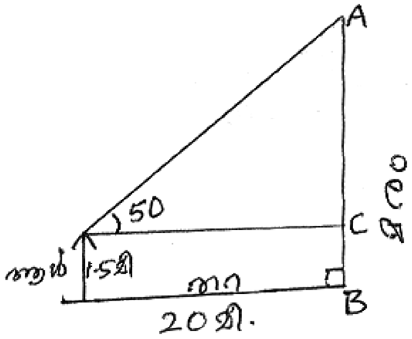
- മേൽകോൺ, കീഴ്കോൺ :

  നേരിട്ട് അളക്കാൻ കഴിയാത്ത ദൂരങ്ങളും ഉയരങ്ങളും ക്ലൈനോമീറ്റർ കൊണ്ട് മേൽകോൺ, കീഴ്കോൺ എന്നിവ അളന്ന് *Sin, Cos, tan* എന്നിവയുടെ വിലകൾ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.



ഉദാഹരണങ്ങൾ : ചിത്രം നൽകി ചോദ്യം കൊടുക്കുന്നു.

1.



1.5 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ ഒരു മരത്തിന്റെ അഗ്രം 50^0 കോണിൽ കാണുന്നതാണ് ചിത്രത്തിൽ സൂചിപ്പിച്ചത്. മരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് മരത്തിന്റെ ഉയരം = $AC + CB$, $CB = 1.5$ മീ.

$\frac{AC}{20} = tan\ 50$ എന്ന് കാണാമല്ലോ. $\therefore\ AC = 20 \times tan\ 50 = 20 \times 1.19 =$ ....

$\therefore$ മരത്തിന്റെ ഉയരം = 23.80 + 1.5 = 25.3 മീറ്റർ.

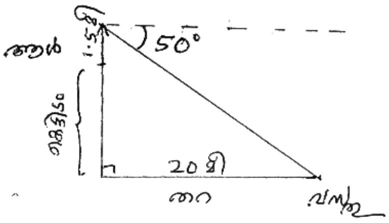
2. 1.5 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്ന് തറയിലെ ഒരു വസ്തുവിനെ കീഴ്കോണിൽ കാണുന്നതാണ് ചിത്രത്തിൽ. കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

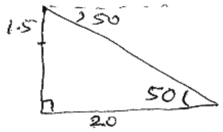
$$\frac{\text{കെട്ടിടം} + 1.5 \text{ മീ}}{20} = tan\ 50$$

$\therefore$ കെട്ടിടം + 1.5 = $20 \times tan\ 50$

$= 20 \times 1.19 = 23.8$

കെട്ടിടം = 23.8 − 1.5 = 22.3 മീ.





ചോദ്യങ്ങൾ

1. 1.75 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ അഗ്രം 60^0 മേൽകോണിൽ കാണുന്നു. കെട്ടിടത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്ന് 30 മീറ്റർ അകലെ നിന്നാണ് നോക്കിയതെങ്കിൽ കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരമെത്ര?

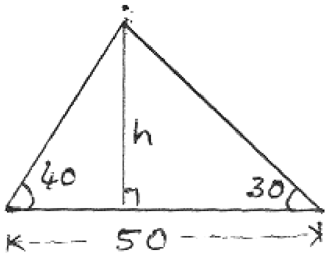
   (ചിത്രം വരച്ച് ഉത്തരം കാണാമല്ലോ?)

2. ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്ന് തറയിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിനെ 70^0 കീഴ്കോണിൽ കാണുന്നു. വസ്തു കെട്ടിടത്തിൽ നിന്ന് 20 മീറ്റർ അകലെയാണെങ്കിൽ കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

   (ചിത്രം വരച്ച് ഉത്തരം കാണുന്നത് വിശദമാക്കുക. ഇവിടെ ആൾ ഒരു ബിന്ദുവായി പരിഗണിക്കണം)

3. ഒരു ഇലക്ട്രിക് പോസ്റ്റിന്റെ മുകളറ്റത്ത് നിന്ന് ഇരുവശങ്ങളിലേക്കും കമ്പികൾ വലിച്ച് കെട്ടി നിലത്ത് ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പികൾ തറയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ 40^0, 30^0 എന്നിവയാമ്. കമ്പികളുടെ ചുവടുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 50 മീ. എങ്കിൽ പോസ്റ്റിന്റെ ഉയരം കാണുക.

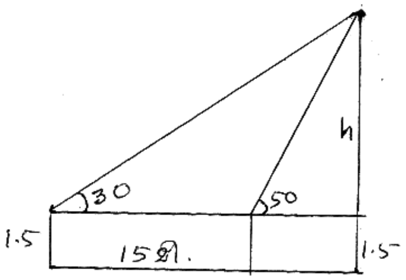
സൂചന:



$$\frac{h}{\tan 30} + \frac{h}{\tan 40} = 50$$

4. ഒരു മരത്തിന്റെ അഗ്രം 1.മീ. ഉയരമുള്ള ഒരാൾ 50^0 മേൽകോണിൽ കാണുന്നു. പിന്നീട് 15 മീറ്റർ പുറകോട്ട് നടന്ന് മുകളറ്റം നോക്കിയപ്പോൾ 30^0 കോണിലും കാണുന്നു. മരത്തിന്റെ ഉയരമെത്ര?

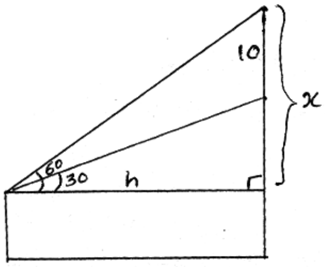
സൂചന :



$$\frac{h}{\tan 30} - \frac{h}{\tan 50} = 15$$

5. പണിതുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു കെട്ടിടം 1.5 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ അതിന്റെ മുകൾഭാഗം 30^0 മേൽകോണിലും, പിന്നീട് 10 മീറ്റർ കൂടി ഉയർത്തി കെട്ടിടം പണിതീർത്തപ്പോൾ 60^0 മേൽകോണിലും കാണുന്നു. കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരമെത്ര? കെട്ടിടത്തിൽ നിന്ന് എത്ര അകലെയാണ് ആൾ നിൽക്കുന്നത്?

സൂചന :

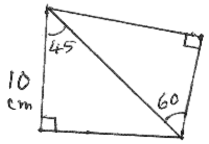


$$\tan 30 = \frac{x-10}{h}, \quad \tan 60 = \frac{x}{h}$$

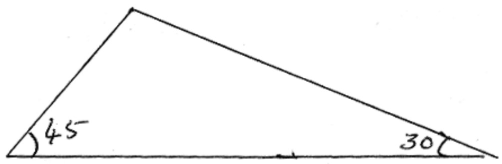
$$\therefore \frac{x-10}{\tan 30} = \frac{x}{\tan 60}, \quad h \times \tan 60 - h \cdot \tan 30 = 10$$

യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റ്

1) മറ്റ് വശങ്ങളുടെ നീളം കാണുക. 2



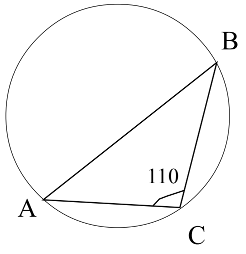
2) ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണ്ടെത്തുക. 2



3) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 30 സെ.മി, 20 സെ.മീ എന്നിവയും അവ ചേരുന്ന കോൺ 50^0 ഉം ആണെങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക. 2

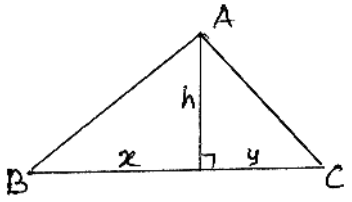
4) ഒരു സാമാന്തരീകത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ 12 സെ.മി, 10 സെ.മി എന്നിവയാണ്. ഒരു കോൺ 140^0 ആയാൽ അതിന്റെ ചെറിയ വികർണത്തിന്റെ നീളം കാണുക. 2

5) വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 20 സെ.മീ ആയാൽ AB യുടെ നീളം കാണുക. 2



6) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 30^0 ഉം അതിന്റെ എതിർവശം 15 സെ.മി ഉം ആയാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്ത വ്യാസമെത്ര?

7) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഒരു ന്യൂനകോൺ 40^0 ആയാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കാണുക. 2

8) 

$\angle B + \angle C = 90$ ആയാൽ
$x \cdot y = h^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9) ഒരു ലൈറ്റ് ഹൗസിന്റെ മുകളിൽ നിന്ന് നോക്കുമ്പോൾ തറയിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിനെ 35^0 കീഴ്കോണിൽ കാണുന്നു. ലൈറ്റ് ഹൗസിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്ന് വസ്തുവിലേക്കുള്ള അകലം 30 മീറ്റർ ആണ്. ലൈറ്റ് ഹൗസിന്റെ ഉയരം എത്ര?

6
സൂചകസംഖ്യകൾ

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനങ്ങളെ സംഖ്യാകോടികൾ ഉപയോഗിച്ച് രേഖപ്പെടുത്തുന്ന രീതി.
- സൂചകാക്ഷങ്ങൾ, സൂചകസംഖ്യകൾ എന്നീ ആശയങ്ങൾ
- രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്ന ആശയം.
- അകലം എന്ന ആശയത്തിന്റെ പ്രായോഗിക സന്ദർഭങ്ങൾ.

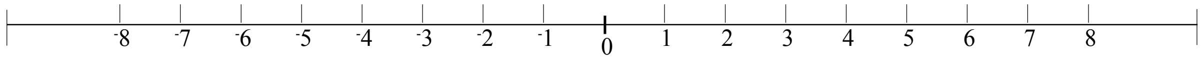
മുന്നറിവുകൾ

- ന്യൂന സംഖ്യകൾ, ഭിന്നസംഖ്യകൾ, അഭിന്ന സംഖ്യകൾ, എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ മുതലായവ ഉൾപ്പെടുന്ന ചതുഷ്ക്രിയകൾ
- സംഖ്യാരേഖ എന്ന ആശയം
- സംഖ്യാരേഖയിൽ എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ, ഭിന്നസംഖ്യകൾ, അഭിന്ന സംഖ്യകൾ, ന്യൂനസംഖ്യകൾ മുതലായവ അടയാളപ്പെടുത്തുന്ന രീതി.
- സംഖ്യാരേഖയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം ബിന്ദുക്കളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ കേവല വിലയാണ്.

പ്രവർത്തനങ്ങൾ

1. സംഖ്യാരേഖയിൽ $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, -4.5, -3.5, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

   എന്നീ സംഖ്യകളുടെ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തുക.

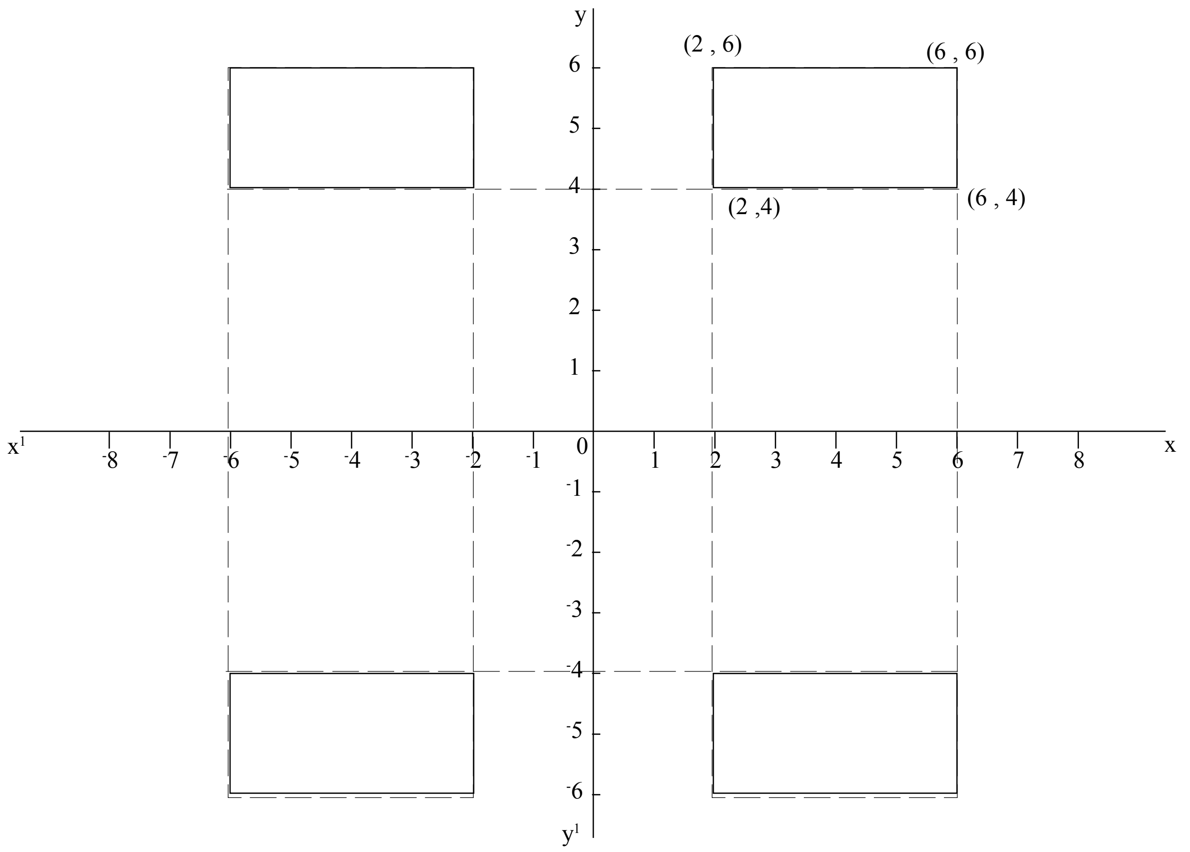


2. സംഖ്യാരേഖയിലെ $^{-}6$ എന്ന ബിന്ദുവും 7 എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം എത്ര?
3. സംഖ്യാരേഖയിലെ 0, 8 എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്ര?

ആശയം : ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനങ്ങളെ സംഖ്യാജോടികൾ ഉപയോഗിച്ച് രേഖപ്പെടുത്തുന്ന രീതി വിശദീകരിക്കുന്നു.

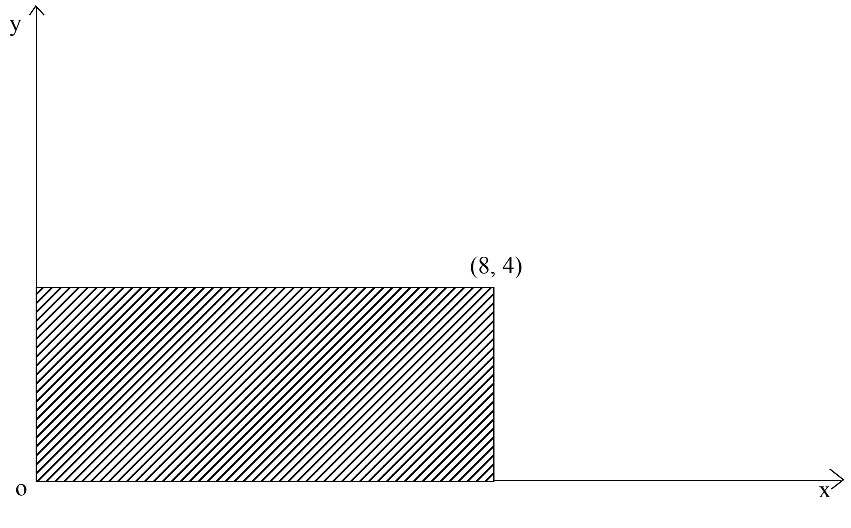
വർക്ക് ഷീറ്റ് -1

താഴെ കൊടുത്ത ചതുരങ്ങളുടെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.



വർക്ക്ഷീറ്റ് -2

ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു മൂലകളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.



ആശയം : സംഖ്യാജോടികൾ ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി പലതരം രൂപങ്ങൾ നിർമിക്കുന്നു.

വർക്ക് ഷീറ്റ് -3

X, Y അക്ഷങ്ങൾ വരച്ച് താഴെ കൊടുത്ത സംഖ്യാജോടികൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അടുത്തടുത്ത ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന രൂപത്തിന് അനുയോജ്യമായ നിറം നൽകുക.

സെറ്റ്-1

(1, 2), (2,1), (0, 2), (−1, 2), (−2, 1), (−2,0), (−2−1), (−1, −2), (−0,−2), (1, −2), (2, −1), (2, 0)

സെറ്റ്-2

(0,6), (1,6), (2,5), (3,5), (5,3), (5,2), (6,1), (6,0)

(6,−1), (5,−2), (5,−3), (3,−5), (2,−5), (1,−6), (0,−6)

(−1,−6), (−2,−5), (−4,−5), (−5,−3), (−5,−2), (−6,−1),

(−6, 0), (−6, 1), (−5, 2), (−5, 3), (−3, 5), (−2, 5), (−1, 6)

വർക് ഷീറ്റ് -4

X, Y അക്ഷങ്ങൾ വരച്ച് താഴെ കൊടുത്ത സംഖ്യാജോടികൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അടുത്തടുത്ത ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് കിട്ടുന്ന രൂപത്തിന് അനുയോജ്യമായ നിറം നൽകുക.

i) (−4, 0), (0, 0), (0, 2), (−2, 2)

ii) (0, 0), (0, 2), (2, 2), (4, 0)

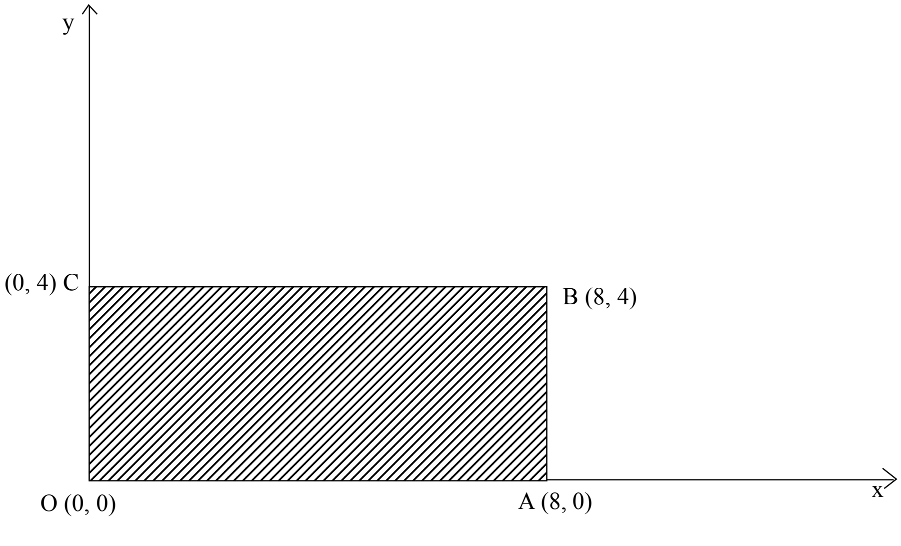
iii) (4, 0), (4, 4), (2, 4), (2, 2)

iv) (2, 2), (2, 4), (0, 4), (−2, 2)

മുഴുവൻ രൂപങ്ങളും ചേർന്നാൽ കിട്ടുന്ന വലിയ രൂപത്തിന്റെ പേരെന്ത്?

ആശയം : സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം കണ്ടെത്തുക.

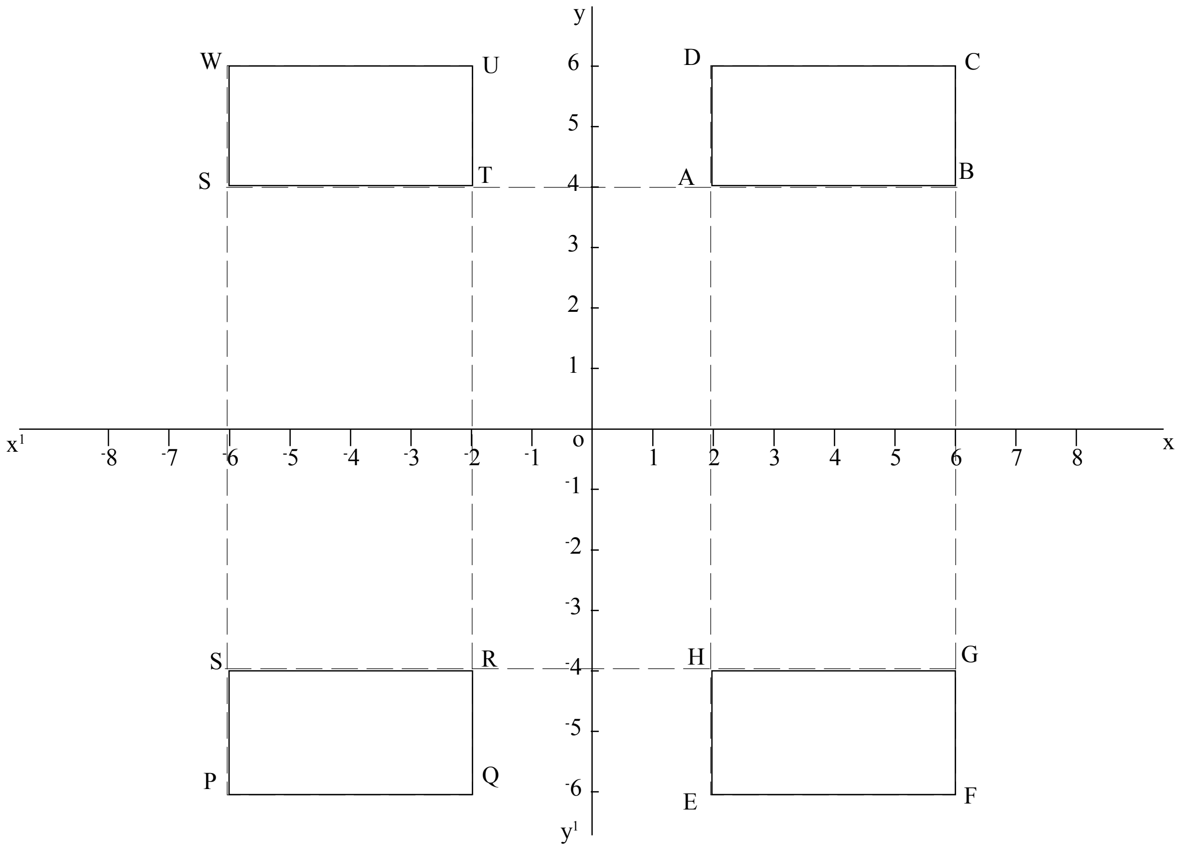
i) ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ OA, AB, BC, CO എന്നീ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.



OA = |8-0| = 8 ആയതിനാൽ BC =8

OC = |4-0| = 4 ആയതിനാൽ AB =4

II) ചിത്രത്തിലെ ചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണ്. ചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.



AB = |6-2| = 8 [AB, X അക്ഷത്തിന് സമാന്തരം]

BC = |6-4| = 2 [BC , Y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരം]

ON = |6-2| = 4 [ON , X അക്ഷത്തിന് സമാന്തരം]

LM = ---------------

MN = ---------------

PQ = ---------------

QR = ---------------

RS = ---------------

SP = ---------------

ST = ---------------

TU = ---------------

UW = ---------------

WS = ---------------

III) താഴെകൊടുത്ത ചോദ്യങ്ങൾക്കുത്തരം കണ്ടെത്താമോ?

1. x അക്ഷത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളാണ് (5, 0), (9, 0) എങ്കിൽ ഈ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്ര?

2. y അക്ഷത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളാണ് (0,2), (0,8) എങ്കിൽ ഈ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്ര?

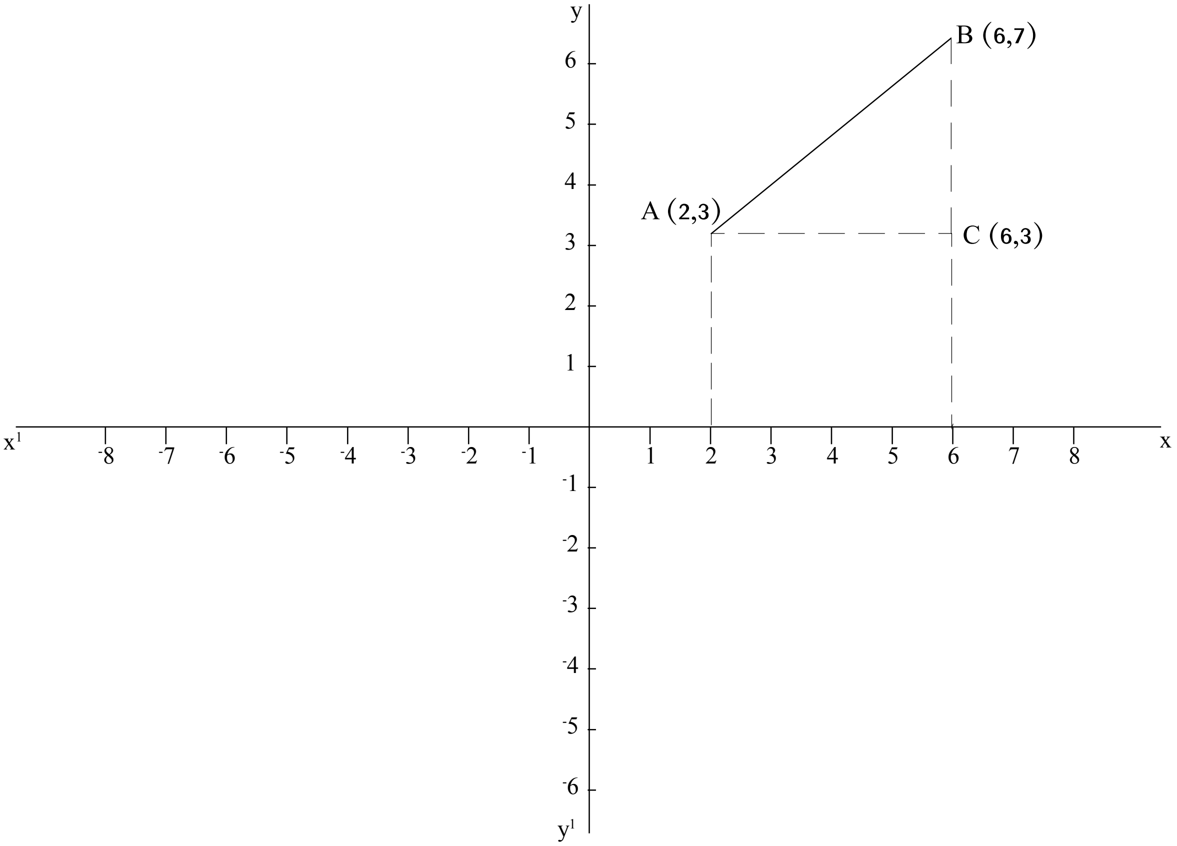
3. x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരയിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളാണ് (5, 4), (10,4) എന്നിവ. ഈ ബിന്ദു

ക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്ര?

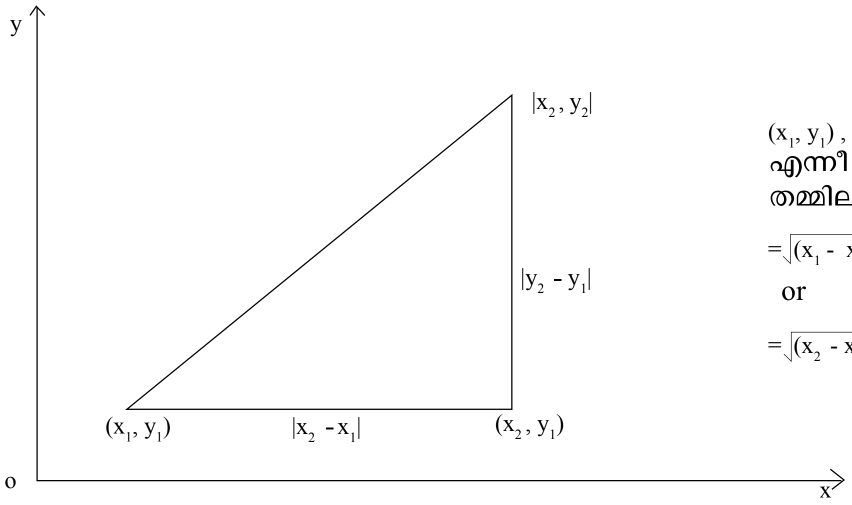
4. y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാണ് (5, 7), (5, 2) എങ്കിൽ ഈ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്ര?

<u>അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമല്ലാത്ത വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം</u>

ചിത്രത്തിലെ A (2,3), B (6,7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്ര?



1. C എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യ എഴുതുക.
   ഉത്തരം : (6, 3)
2. മട്ടത്രികോണം ACB യിൽ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരയേത് ?
   ഉത്തരം : AC
3. AC എന്ന വരയുടെ നീളം എത്ര?
   ഉത്തരം : $|16-2| = 4$
4. മട്ടത്രികോണം ABC യിൽ y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരയേത് ?
   ഉത്തരം : CB
5. CB എന്ന വരയുടെ നീളം എത്ര?
   ഉത്തരം : $|7-3|=4$
6. AB എന്ന വരയുടെ നീളം എത്ര? ഉത്തരം : $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$
   $AB = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ യൂണിറ്റ് . $AB = \sqrt{(6-2)^2 + (7-3)^2}$
7. (x, y), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്ര?
   മുകളിൽ കൊടുത്ത മാതൃകയിൽ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വരകൾ ഉപയോഗിച്ച് മട്ടത്രികോണം പൂർത്തിയാക്കുന്നു. അകലം കണക്കാക്കുക.



(x_1, y_1) , (x_2, y_2)
എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ
തമ്മിലുള്ള അകലം

$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$

or

$= \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

v) താഴെ കൊടുത്ത ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ പരിശോധിച്ച് അവയെ X അക്ഷത്തിലുള്ളവ, Y അക്ഷത്തിലുള്ളവ, അക്ഷങ്ങളിലല്ലാത്തവ എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിക്കുക.

(4 , 0) , (9 , 2) , (0 , 4) , (10 , 2) , (0 , 10)
(10 , 0) , (-1 , -2) , (-1 ,0) , (0 , -1)
(-2 , 0) , (0 , -2) , (7 , 0) , (4 , 7)

x അക്ഷത്തിലുള്ളവ	y അക്ഷത്തിലുള്ളവ	അക്ഷങ്ങളില്ലാത്തവ

വർക് ഷീറ്റ് - 6 താഴെ കൊടുത്ത മാതൃകയിൽ വർക് ഷീറ്റ് പൂർത്തിയാക്കുക.

ബിന്ദുക്കൾ (x_1 , y_1)	സൂചക സംഖ്യകളുടെ സ്ഥാനം	$\|x_1-x_2\|$	$\|y_1-y_2\|$	ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം
(0, 0), (5,0)	x അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ	5	0	5
(0, 2), (0, 7)	y അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ	0	5	0
(-3, 0) (4, 0)	-	-	-	-
(0, -1) (0, -5)	-	-	-	-
(0, 10) (0, 5)	-	-	-	-
(4, 2) (7, 2)	x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ	3	0	3
(5, 1) (5,7)	y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ	0	6	6
(7, 2) (7, 8)	-	-	-	-
(6, 3) (10, 3)	-	-	-	-
(0, 0) (0, -7)	-	-	-	-
(9, 4) (9,10)	-	-	-	-
(0, 9) (0, -4)	-	-	-	-
(6, 7) (10, 7)	-	-	-	-

വർക് ഷീറ്റ് - 6

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	$\lvert x_1 - x_2 \rvert$	$\lvert x_1 - x_2 \rvert^2$	$\lvert y_1 - y_2 \rvert$	$\lvert y_1 - y_2 \rvert^2$
(6, 3)	(9, 7)	3	9	4	16
(5, 4)	(8, 6)	3	2	9	4
(3, 7)	(7, 6)	-	-	-	-
(10, 4)	(6, 3)	-	-	-	-
(16, 10)	(6, 4)	-	-	-	-
(25, -5)	(-10, 25)	15	225	-	-
(10, -7)	(15 -4)	5	25	3	9

വർക് ഷീറ്റ് - 7

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം
(6, 3)	(9, 7)	$\sqrt{9 + 16} = 5$	5 യൂണിറ്റ്
(5, 4)	(8, 6)	$\sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$	$\sqrt{13}$ യൂണിറ്റ്
(3, 7)	(7, 6)	-	-
(10, 4)	(-6, 3)	-	-
(16, 10)	(6, 4)	-	-
(25, -5)	(-10, 25)	-	-
(0, -7)	(5 -4)	-	-

വർക് ഷീറ്റ് - 8

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	$(x_1 - x_2)^2$	$(y_1 - y_2)^2$	$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം
(2, 3)	(-4, 6)	36	9	$\sqrt{45}$	$\sqrt{45}$ യൂണിറ്റ്
(-3, -2)	(1, -2)	-	-	-	-
(1, -2)	(0,0)	-	-	-	-
(0,0)	(-3,1)	-	-	-	-
(-3, 1)	(-3, -2)	-	-	-	-
(-3, -2)	(0,0)	-	-	-	-
(1, -2)	(-3, 1)	-	-	-	-
(2, 1)	(3, 4)	-	-	-	-
(3, 4)	(-3,6)	-	-	-	
(-3, 6)	(2,1)	-	-	-	-
(1, 2)	(2, 3)	-	-	-	-

- ആശയം

  ശീർഷങ്ങളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് അവ നിശ്ചയിക്കുന്ന ജ്യാമതീയ രൂപങ്ങളുടെ വിവിധ അളവുകൾ കണ്ടെത്തുന്നു.

ചോദ്യം-1

X അക്ഷവും Y അക്ഷവും വരച്ച് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവ ക്രമത്തിൽ യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന രൂപത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക.

K (-3, 1), L (-3, -4), M (2, -4), N (2, 1)

സൂചനകൾ

K എന്ന ബിന്ദുവും L എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം $= \sqrt{(-3 - {}^{-}3)^2 + (1 - {}^{-}4)^2}$

$= \sqrt{0 + 25} = 5$ യൂണിറ്റ്

L ബിന്ദുവും എന്ന M ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം $= \sqrt{(-3 - 2)^2 + ({}^{-}4 - {}^{-}4)^2}$

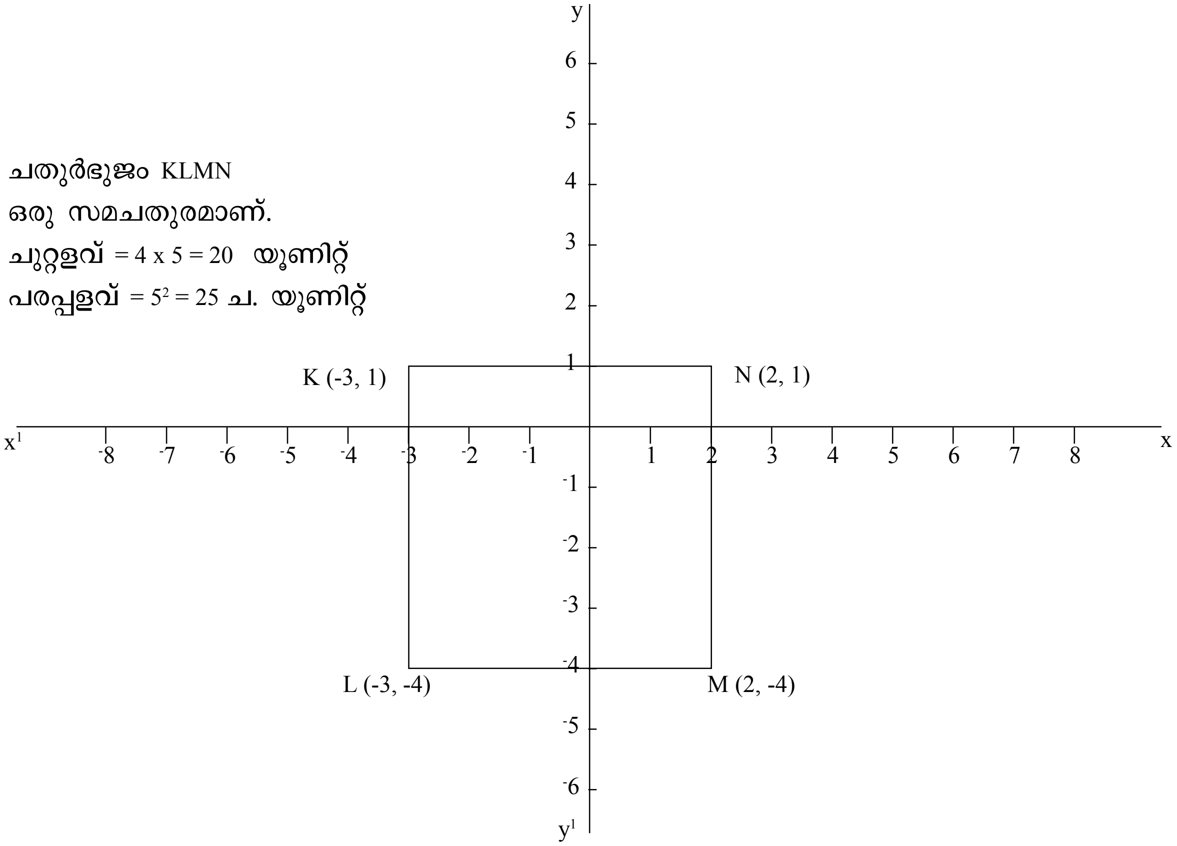
$= \sqrt{25 + 0} = 5$ യൂണിറ്റ്

M, N എന്നിവ തമ്മിലുള്ള അകലം $= \sqrt{(2-2)^2 + ({}^{-}4 - {}^{-}1)^2}$

$= \sqrt{0 + 25} = 5$ യൂണിറ്റ്

N, K എന്നിവ തമ്മിലുള്ള അകലം $= \sqrt{(2 - {}^{-}3)^2 + ({}^{-}1 - {}^{-}1)^2}$

$= \sqrt{25 + 0} = 5$ യൂണിറ്റ്



ചതുർഭുജം KLMN

ഒരു സമചതുരമാണ്.

ചുറ്റളവ് $= 4 \times 5 = 20$ യൂണിറ്റ്

പരപ്പളവ് $= 5^2 = 25$ ച. യൂണിറ്റ്

മുകളിൽ കൊടുത്ത അതേ മാതൃകയിൽ താഴെ കൊടുത്ത സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് രൂപങ്ങളുടെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക.

a) A(1 , 2) , B (5, 2), C (5, 5), D (1, 5)

b) E (5, 4), F (-3,4), G (-3, -1), H (5, -1)

c) P (4, 1), G (1, 1), R (1, 4), S (4, 4)

d) J (0, 6), X (3, 6) , Y (3, 2), Z (0, 2)

e) T (2, 5), U (-1,5), V (-1, -3), W (2, -3)

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

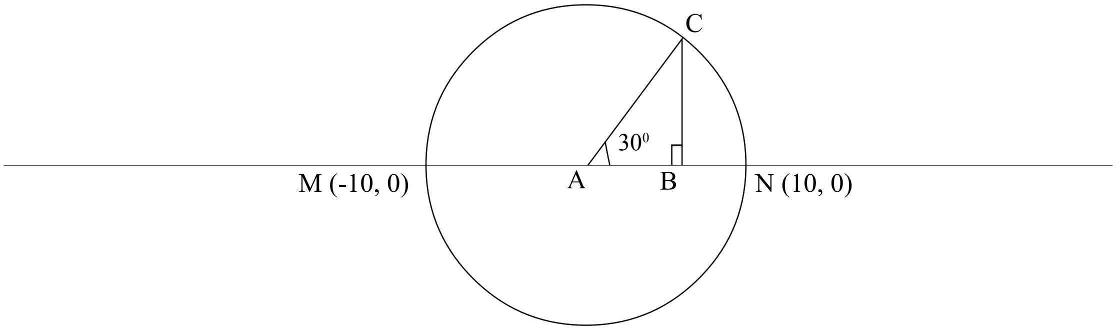
1. 5 സെ.മീ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം (3,0) എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമാക്കി വരച്ചാൽ ഈ വൃത്തം x അക്ഷത്തെ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക. y അക്ഷത്തെ കൂട്ടി മുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ ഏതായിരിക്കും?

2. വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായി വരച്ചിരിക്കുന്ന ഓരോ ചതുരത്തിന്റെയും എതിർമൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. മറ്റു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

a) (0, 0), (3,5) b) (6, 1), (2, 4)

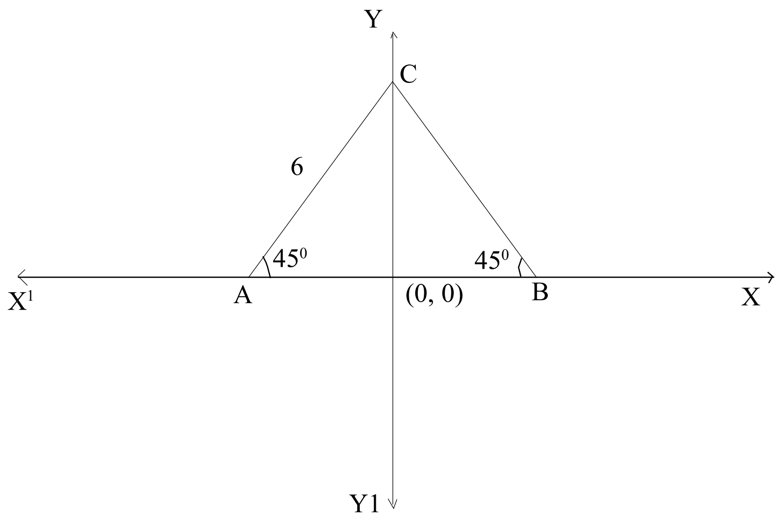
c) (-3, 2), (2, -3) d) (-2, -8) , (-5, -1)

3. ചുവടെ കൊടുത്ത ത്രികോണം ABC യുടെ ശീർഷങ്ങളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.



സൂചകസംഖ്യകൾ, ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും

1. വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായി വരച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു ചതുരത്തിന്റെ എതിർമൂലകളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ (2,3), (6,7) എന്നിവയാണ്. മറ്റു മൂലകളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. താഴെ കൊടുത്ത ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് ശീർഷങ്ങളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.



3. ആരം 5 യൂണിറ്റായ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം (1, 3) ആണ്. ഈ വൃത്തം അക്ഷങ്ങളെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.
4. (2, 1), (6, 1), (8,9), (4, 9) ഇവ മൂലകളായ ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാല് വശങ്ങളുടെയും നീളം കണക്കാക്കുക. ചതുർഭുജത്തിന് അനുയോജ്യമായ പേരെന്ത്?

യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റ്

1. അക്ഷങ്ങൾ വരച്ച് താഴെ കൊടുത്ത ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

   ($^-$1, 2), b (3, 4) C (6, $^-$5), D ($^-$6, $^-$3)

2. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും ആധാര ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം കാണുക.

   (a) (3, 4) (b) (3, 3) (c) (3, 2) (d) (3,1)

3. (3, -4), (-2, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ എതിർമൂലകളാണ്. മറ്റു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

4. ചതുർഭുജം PQRSന്റെ ശീർഷങ്ങളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ തന്നിരിക്കുന്നു. വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

   P (-4, 3), Q (4, 3), R (4, 9) , S (-4, 9)

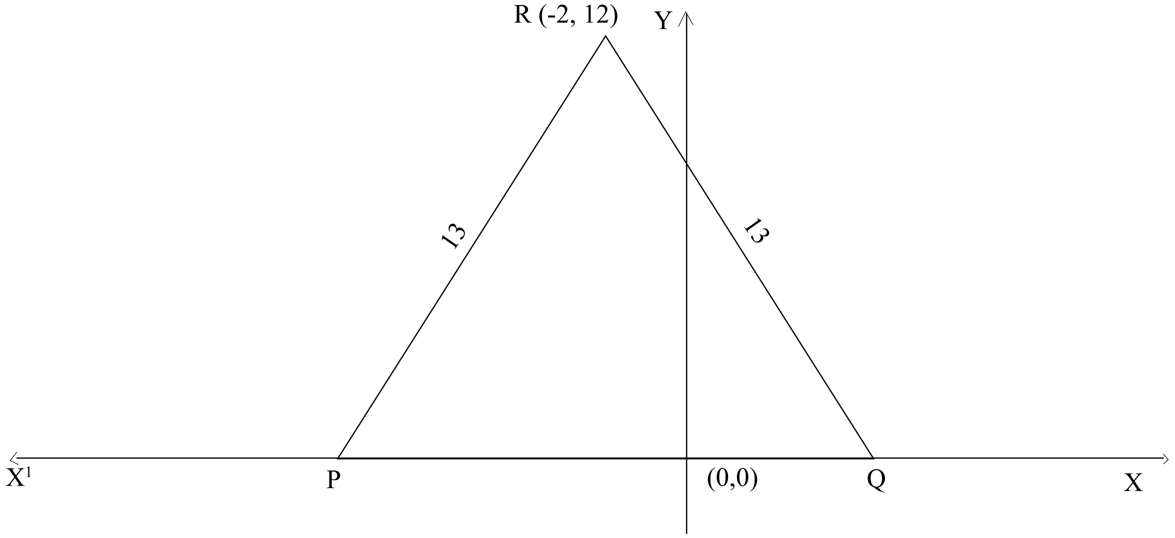
5. താഴെ കൊടുത്ത ബിന്ദുക്കൾ x അക്ഷത്തിലുള്ളവ, y അക്ഷത്തിലുള്ളവ, അക്ഷങ്ങളില്ലാത്തവ എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിച്ചെഴുതുക.

   (5, 0) (7, 0) (0, -3), (3, 0), (-3, 0)

   (0, 9) (5, 2) (6, 3) (8, 0) (0, 8)

6. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം (2, 3) ആണ്. ആരം 6 യൂണിറ്റ് ആയ ഈ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണോ (7, 2) എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

7. താഴെ കൊടുത്ത ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.



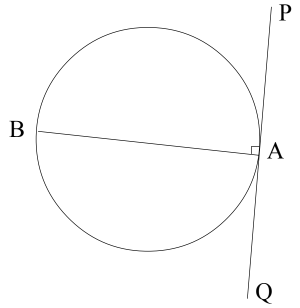
7
തൊടുവരകൾ

വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന വരകളുടെ പ്രത്യേകതകളാണ് ഇതിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്നത്. വൃത്തങ്ങൾ എന്ന പാഠഭാഗത്ത് കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മുന്നറിവുകൾ ഇവിടെയും ആവശ്യമാണ്. കൂടാതെ മുൻ ക്ലാസുകളിൽ പഠിച്ച ഏതാനും ആശയങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

- കോണിന്റെ സമഭാജിയുടെ നിർമിതി
- ഒരു വരയ്ക്ക് പുറത്തുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്നും ആ വരയിലേക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ നിർമിതി.
- ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ 30^0, 60^0, 90^0 ആണെങ്കിൽ വശങ്ങൾ, 1, $\sqrt{3}$, 2 എന്നിവയ്ക്കാനുപാതികമായിരിക്കും.
- ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെയും അതിലേക്കുള്ള ഉന്നതിയുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ് അതിന്റ് പരപ്പളവ്.
- ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളുടെ നീളം a, b, c ആയാൽ ചുറ്റളവ് = a + b + c

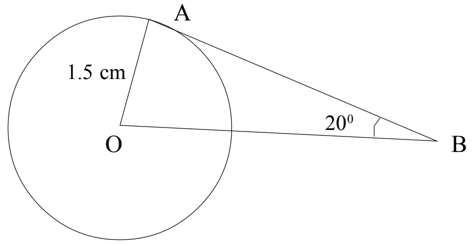
വരയും വട്ടവും

- വൃത്തത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം തൊടുന്ന വരയെ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവര എന്ന് വിളിക്കുന്നു.
- വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള തൊടുവര ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസത്തിന് ലംബമാണ്.



ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസമാണ്. A യിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവരയാണ് PQ . അതുകൊണ്ട് < PAB, < QAB ഇവ മട്ടകോണുകളാണ്.

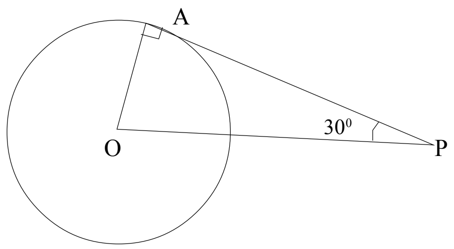
1. 2. 5 സെമീ ആരമുള്ള വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ P എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. P യിൽ കൂടി തൊടുവര വരയ്ക്കുക.

2. 

ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രവും AB തൊടുവരയുമാണ് തന്നിട്ടുള്ള അളവിൽ ഈ ചിത്രം ഉത്തരക്കടലാസിൽ വരയ്ക്കുക.

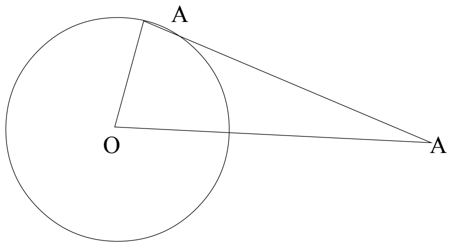
3. ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവരകൾ സമാന്തരമാണെങ്കിൽ ആ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

4.



ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രവും
PQ തൊടുവരയുമാണ്.
$< OPQ = 30^0$, $OP = 10$ സെ.മീ
OQ, PQ ഇവ കണക്കാക്കുക.

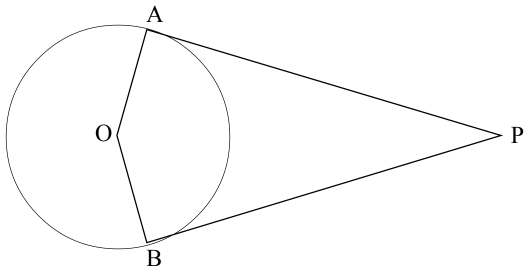
5.



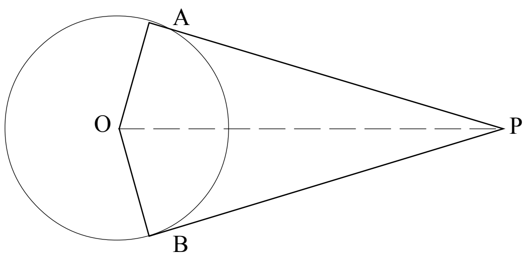
ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രവും
AB തൊടുവരയുമാണ്.
OB = 5 സെ.മീ, OA = 15 സെ.മീ ആയാൽ AB എത്ര?

തൊടുവരകളും കോണുകളും

- ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും അതിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളും ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും മൂലകളായ ചതുർഭുജം ചക്രിയമാണ്.
- ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണും, ഈ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന കോണും അനുപൂരകങ്ങളാണ്.



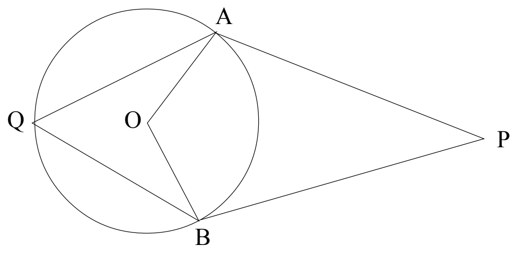
ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം. A,B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ P യിൽ കൂട്ടി മുട്ടുന്നു. അതിനാൽ ചതുർഭുജം
OAPB ചക്രീയചതുർഭുജമാണ്.
കൂടാതെ <AOB, <APB ഇവ അനുപൂരകങ്ങളാണ്.
$< OAP = 90^0$, $< OBP = 90^0$, $< AOB + < APB = 180^0$



ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം. A,B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ P യിൽ കൂട്ടി മുട്ടുന്നു. AOP, BOP എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യം.
AP, BP എന്നീ തൊടുവരകൾ തുല്യം.
$< AOP = < BOP$, $< APO = < BPO$
അതായത് OP എന്ന വര,
<AOB, <APB,
എന്നീ കോണുകളുടെ സമഭാജിയാണ്.

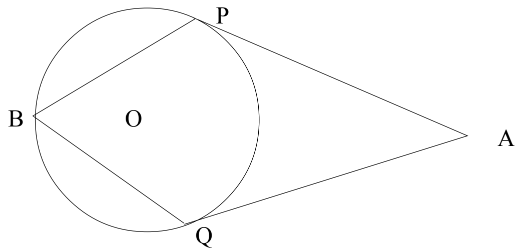
- ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന ബിന്ദുവും വൃത്തകന്ദ്രവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ആരങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണിന്റെയും തൊടുവരകൾക്കിടയിലെ കോണിന്റെയും സമഭാജിയാണ്.

1



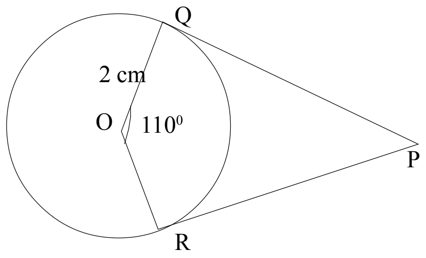
ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്ത കേന്ദ്രം. A,B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ P യിൽ കൂട്ടുമുട്ടുന്നു.
< APB = 70^0 ആയാൽ < AQB എത്ര?

2



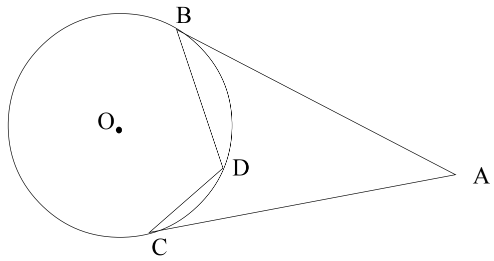
ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം P,Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ A യിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.
i) < PBQ = 50^0 ആയാൽ < OAP എത്ര?
ii) < PBQ, < OAP ഇവയുടെ തുക 90^0 ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

3



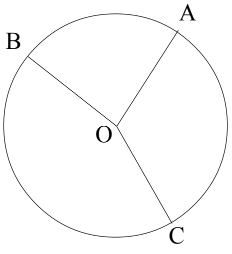
ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ P യിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. തന്നിട്ടുള്ള അളവിൽ ചിത്രം ഉത്തരക്കടലാസിൽ വരയ്ക്കുക.

4



ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രവും B,C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ A യിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.
< BAC = 50^0 ആണ്.
< BDC എത്ര?

5



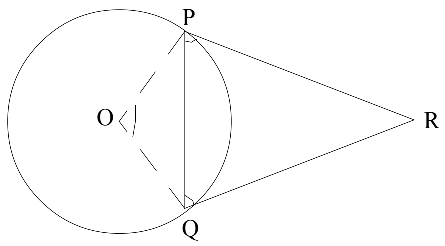
ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം <AOC = 130^0, < BOC = 140^0 ആണ്.
A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി വൃത്തത്തിന് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

6. 2 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വശങ്ങളെല്ലാം ഈ വൃത്തത്തെ തൊടുന്നതും രണ്ടു കോണുകൾ 50^0, 75^0 ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

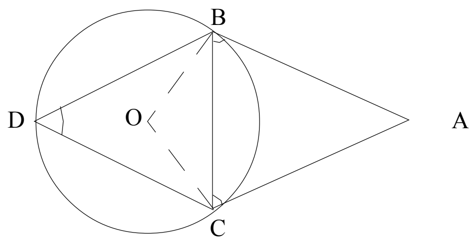
7. 2.5 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വശങ്ങളെല്ലാം ഈ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

ഞാണും തൊടുവരയും

- വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ ഞാണുമായുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ ഞാണിന്റെ കേന്ദ്ര കോണിന്റെ പകുതിയാണ്.
- വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാൺ അതിന്റെ അറ്റത്തുള്ള തൊടുവരയുമായി ഒരു വശത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, മറുവശത്തുള്ള വൃത്തഭാഗത്തുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന് തുല്യമാണ്.



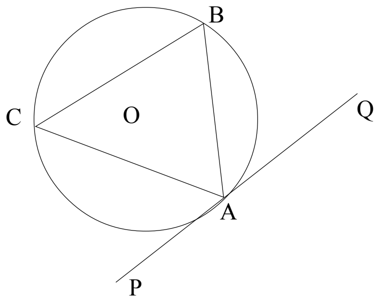
ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം PQ എന്ന ഞാണിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ R ൽ കൂട്ടി മുട്ടുന്നു.
ഓരോ തൊടുവരയും PQ എന്ന ഞാണുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളാണ്. <QPR, <PQR ഓരോന്നിന്റെയും അളവ് < POQ ന്റെ പകുതിയാണ്.
അതായത് < QPR = < PQR = ½ x < POQ



ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം BC എന്ന ഞാണിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ A ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.
< ABC, < ACB ഇവ ഓരോന്നും
< BOC യുടെ പകുതിയാണ്.
< BDC, < BOC യുടെ പകുതിയാണ്.

അതായത് < BDC = < ABC= < ACB

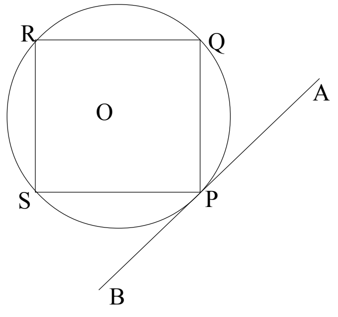
1.



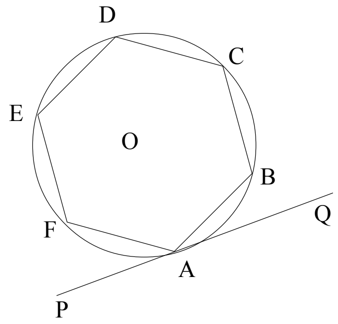
ചിത്രത്തിൽ ABC സമഭുജ ത്രികോണമാണ്. A എന്ന മൂലയിൽ കൂടി ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിനുള്ള തൊടുവരയാണ് PQ

< BAQ എത്ര?

2.

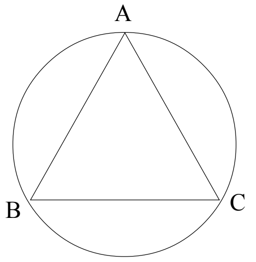


ചിത്രത്തിൽ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽ കൂടി, അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന് വരച്ച തൊടുവരയാണ് AB
< APQ എത്ര?

2. 

ചിത്രത്തിൽ സമഷഡ്ഭുജം ABCDEF ന്റെ
A എന്ന മൂലയിൽ കൂടിവരച്ച
തൊടുവരയാണ് PQ
< BA Q എത്ര?

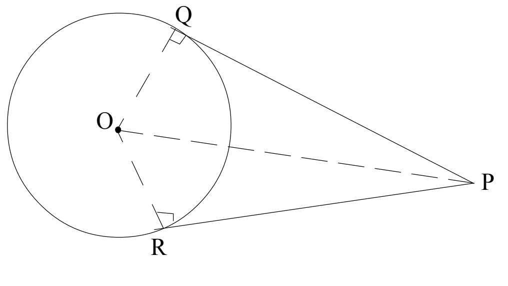
4. ത്രികോണം ABC യിൽ ആണ്. $<A = 45^0$, $<B = 65^0$ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് മൂലകളിൽ കൂടിയും അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

5. 

ചിത്രത്തിൽ AB = AC ആയാൽ
A യിൽ കൂടി വൃത്തത്തിന് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവര,
BC യ്ക്ക് സമാന്തരമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക

പുറത്തുനിന്നും തൊടുവര

- വൃത്തത്തിന് പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിലേക്ക് രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കാം.
- ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.
- ഒരു വൃത്തത്തിലെ നാല് ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങളുടെ തുക തുല്യമാണ്.



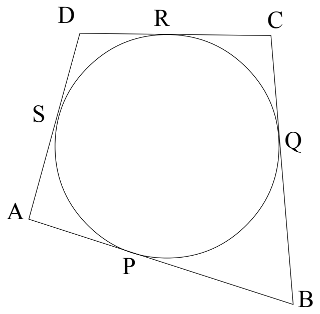
ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം
P യിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേക്കുള്ള തൊടുവരകളാണ് PQ, PR
പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$PQ = \sqrt{OP^2 - OQ^2}$, $PR = \sqrt{OP^2 - OR^2}$

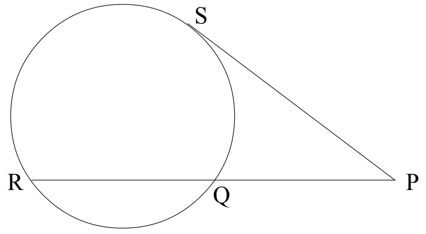
OQ = OR ആയതുകൊണ്ട് PQ = PR
അതായത് തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളം

കൂടാതെ OP വ്യാസമായ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായിരിക്കും Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ,

$(\therefore <OQP = 90^0, <ORP = 90^0)$



വൃത്തത്തിലെ P,Q,R,S എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവരകൾ ചേർന്നുള്ള ചതുർഭുജമാണ് ABCD .
AP = AS, BP = BQ, CQ = CR, DR = DS
ആയതുകൊണ്ട്
AB + CD = BC + AD ആയിരിക്കും.

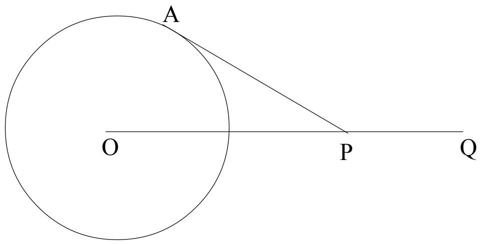


ചിത്രത്തിൽ PS തൊടുവരയാണ്.
അതുകൊണ്ട് PQ x PR = PS^2 ആയിരിക്കും.

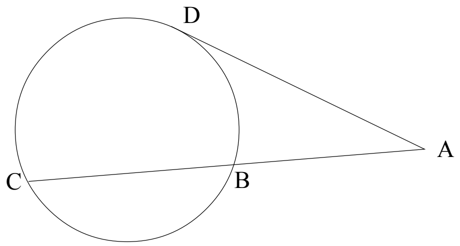
അതായത് PR, PQ എന്നീ നീളം വശങ്ങളായി വരുന്ന ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. PS വശമായ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന് തുല്യം.

(ഒരു ചതുരത്തിന് തുല്യപരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നതിനും, ഒരു സമചതുരത്തിന് തുല്യപരപ്പളവുള്ള ചതുരം വരയ്ക്കുന്നതിനും ഈ ആശയം ഉപയോഗപ്പെടുത്താം)

1. ഒരു വൃത്തത്തിലെ നാല് ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവരകൾ ചേർന്നുള്ള ചതുർഭുജമാണ് PQRS. PQ = 9 സെ.മീ, QR = 13 സെ.മീ, PS = 6 സെ.മീ ആണെങ്കിൽ RS എത്ര?

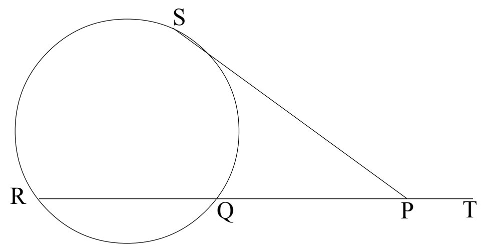
2) 

ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം
OP = 10 സെ.മീ, PQ = 2സെ.മീ P യിൽ നിന്നുള്ള തൊടുവരയുടെ (PA യുടെ) നീളം 8 സെ.മീ ആണെങ്കിൽ Q ൽ നിന്നുള്ള തൊടുവരയുടെ നീളമെത്ര?

3) 

ചിത്രത്തിൽ AD തൊടുവരയാണ്.
AD = 18 സെ.മീ, AB = 12 സെ.മീ
ആയാൽ BC എത്ര?

4)

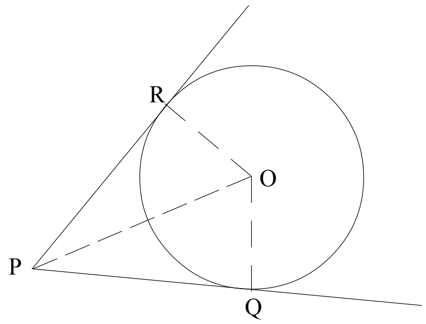


ചിത്രത്തിൽ PS തൊടുവരയാണ്.
PS = 12 സെ.മീ, PQ = 8 സെ.മീ, PT = 2 സെ.മീ
T യിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിലേക്കുള്ള തൊടുവരയുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

5. 4 സെ.മീ വശമുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പളവുള്ളതും ഒരു വശം 5 സെ.മീ ആയതുമായ ചതുരം വരയ്ക്കുക.

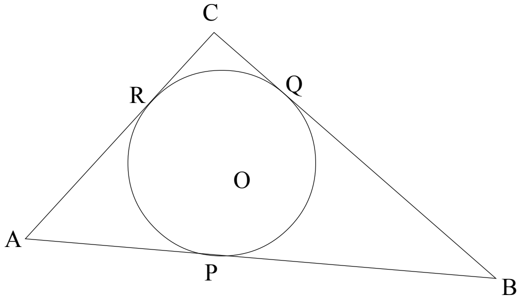
വരയെ തൊടുന്ന വട്ടം

- കൂട്ടിമുട്ടുന്ന രണ്ട് വരകളെ തൊടുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം, വരകൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെ സമഭാജിയിലാണ്.
- ഏത് ത്രികോണത്തിലും കോണുകളുടെ സമഭാജികളെല്ലാം ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളെയും തൊടുന്ന വൃത്തത്തെ അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം എന്നുപറയുന്നു.
- ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതി കൊണ്ട് ഹരിച്ചതിന് തുല്യമാണ്.

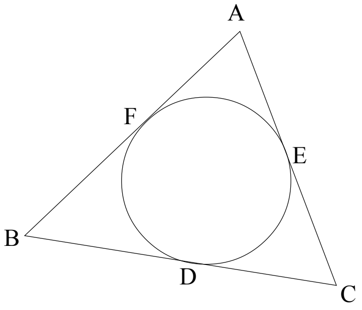


ചിത്രത്തിൽ PQ, PR എന്നീ വരകളെ തൊടുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ് 'O' .
OPQ, OPR എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമായതുകൊണ്ട്
< OPQ = < OPR
< QPR ന്റെ സമഭാജിയാണ് PO
അതായത് വൃത്തകേന്ദ്രം
< QPR ന്റെ സമഭാജിയിലാണ്

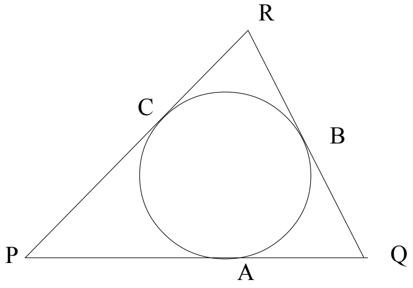
- ഏതൊരു ത്രികോണത്തിനും അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കാം.
- ഏതൊരു സമബഹുഭുജത്തിനും അന്തർവൃത്തവും പരിവൃത്തവും വരയ്ക്കാം. അന്തർവൃത്തത്തിന്റെയും പരിവൃത്തത്തിന്റെയും കേന്ദ്രം ഒരേ ബിന്ദു ആയിരിക്കും.
- രണ്ടു ജോടി എതിർവശങ്ങളുടെയും തുകകൾ തുല്യമായ ചതുർഭുജത്തിന് അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കാം.

1) 

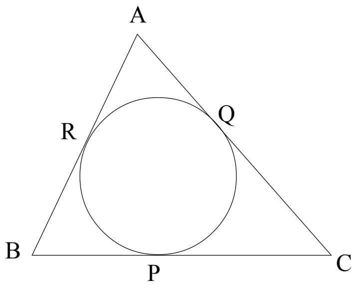
ചിത്രത്തിൽ ABC യുടെ അന്തർവൃത്തം വശങ്ങളെ P,Q,R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുന്നു. AP = 4 സെ.മീ, BQ = 5 സെ.മീ, CR= 3 സെ.മീ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണക്കാക്കുക.

2) 

ചിത്രത്തിൽ ത്രികോണം ABC യുടെ അന്തർവൃത്തം വശങ്ങളെ D, E, F എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുന്നു. AE = 4 സെ.മീ, BC = 13 സെ.മീ ആയാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര?

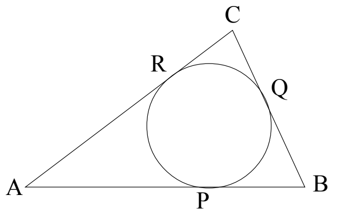
3) 

ചിത്രത്തിൽ ത്രികോണം PQR ന്റെ അന്തർവൃത്തം വശങ്ങളെ A, B,C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുന്നു. PQ = 10 സെ.മീ, QR = 7 സെ.മീ, PR= 11 സെ.മീ PA, QB, RC ഇവ കാണുക

4) 

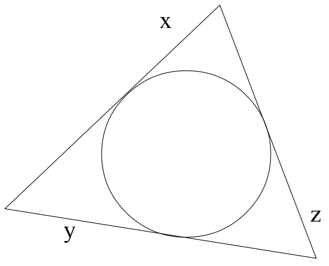
ചിത്രത്തിൽ ത്രികോണം ABC യുടെ അന്തർവൃത്തം വശങ്ങളെ P, Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുന്നു. BP= 6 സെ.മീ, CP = 8 സെ.മീ, അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 4 സെ.മീ ആയാൽ AB, AC ഇവ കണക്കാക്കുക.

5. വശങ്ങൾ 13 സെ.മീ, 14 സെ.മീ, 15 സെ.മീ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം കാണുക.



ചിത്രത്തിൽ ത്രികോണം ABC യുടെ അന്തർവൃത്തം വശങ്ങളെ P,Q,R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുന്നു. AP= 14 സെ.മീ, BQ = 7 സെ.മീ, CR= 3 സെ.മീ ആണ്. അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം കാണുക.

- കുറിപ്പ് :



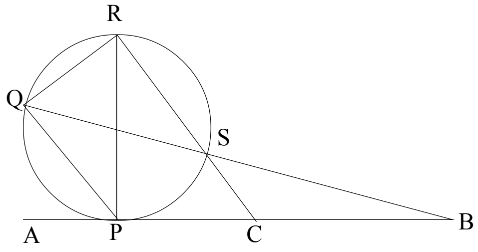
അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം $= \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$

ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= \sqrt{xyz(x+y+z)}$

7. 6 സെ.മീ വശമുള്ള സമഭുജത്രികോണം വരച്ച് അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.
8. ഒരു വശം 4.5 സെന്റീമീറ്ററും, ഒരു കോൺ 70^0 യും ആയ സമഭുജസാമാന്തരികം വരച്ച് അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.
9. രണ്ടു വശങ്ങൾ 6 സെ.മീ, 7 സെ.മീ ഉൾക്കോൺ 60^0 ആയ ത്രികോണം വരച്ച് അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.
10. മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം, അതിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ തുകയിൽ നിന്ന് കർണം കുറച്ചതിന് തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

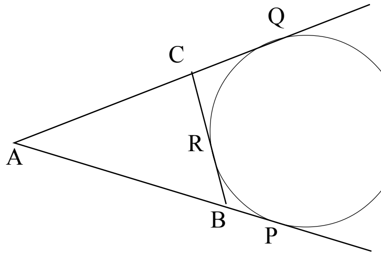
കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1)



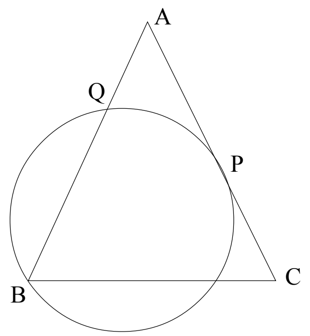
ചിത്രത്തിൽ 'O' വൃത്തകേന്ദ്രം. Pയിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവരയാണ് AB.
$< PQB = 40^0$ ആയാൽ
$< BPQ$, $< PBQ$, $< PCR$, $< PRQ$ കണക്കാക്കുക.

2)



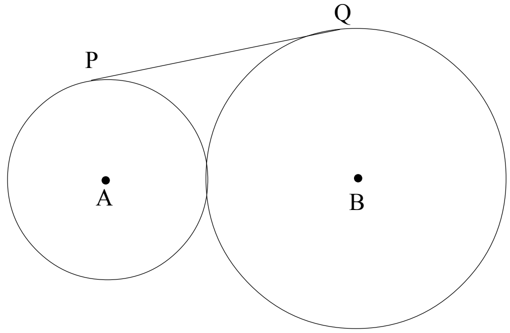
ചിത്രത്തിൽ വൃത്തം വരകളെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് P, Q, R
ത്രികോണം ABC യുടെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതി AP യ്ക്ക് തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

3)



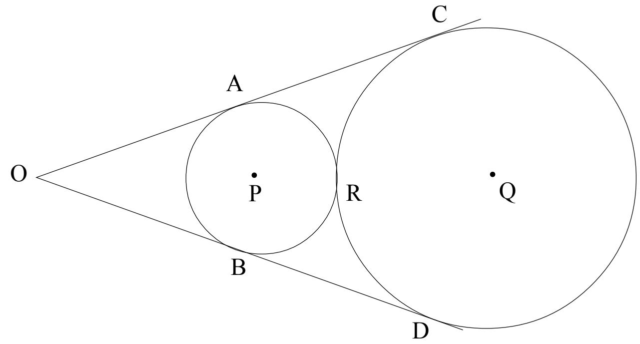
ചിത്രത്തിൽ AB =AC യും, AC യുടെ മധ്യബിന്ദു P യും ആകുന്നു. AC വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുവാണ് P എങ്കിൽ AB = 4x AP എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4)



ചിത്രത്തിൽ രണ്ട് വൃത്തങ്ങളെയും തൊടുന്ന വരയാണ് PQ
A കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 6 സെ.മീ ഉം, B കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 9 സെ.മീ ഉം ആകുന്നു. P Q ന്റെ നീളം കാണുക.

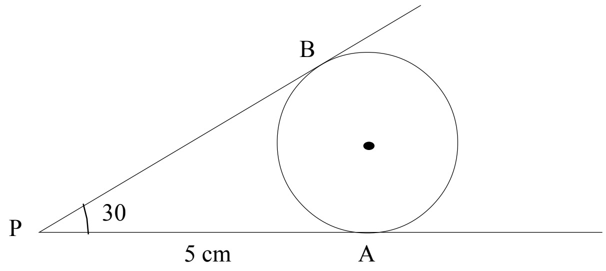
5)



ചിത്രത്തിൽ വൃത്തങ്ങൾ കോണിന്റെ വശങ്ങളെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ്. A, B, C, D. വൃത്തങ്ങൾ പരസ്പരം R ൽ തൊടുന്നു. P, Q ഇവ വൃത്തകേന്ദ്രങ്ങൾ. $< AOB = 60^0$ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 2 സെ.മീ എങ്കിൽ വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരമെത്ര?

6. 2 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം അന്തർവൃത്തമാകത്തക്കവിധം രണ്ട് കോണുകൾ 40^0, 50^0 ആയ ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.
7. 2.5 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം അന്തർവൃത്തമാകത്തക്കവിധം ഒരു വശം 10 സെ.മീ, ആ വശത്തിന്റെ ഒരറ്റത്തുള്ള കോൺ 70^0 ആയ ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.
8. ത്രികോണം ABC യിൽ $< B = 90^0$, AB= 5 സെ.മീ, BC = 12 സെ.മീ ആകുന്നു. ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്ത ആരം കണക്കാക്കുക.
9. 8 സെ.മീ വശമുള്ള സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെയും പരിവൃത്തത്തിന്റെയും ആരം കണക്കാക്കുക.

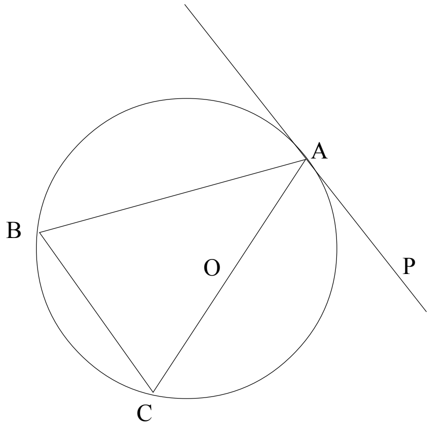
6)



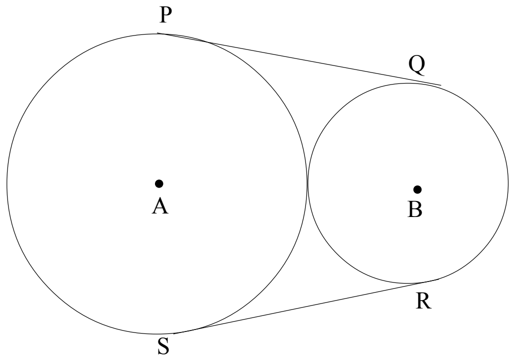
തന്നിട്ടുള്ള അളവിൽ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.

യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റ്

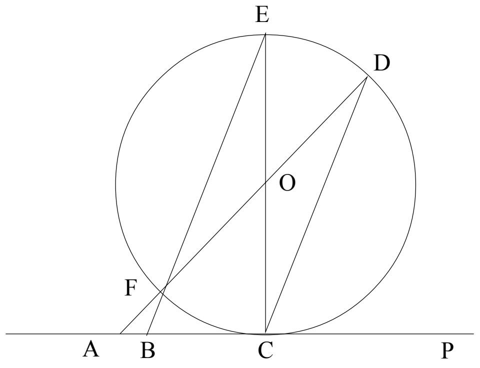
മാർക്ക് : 20

1) 

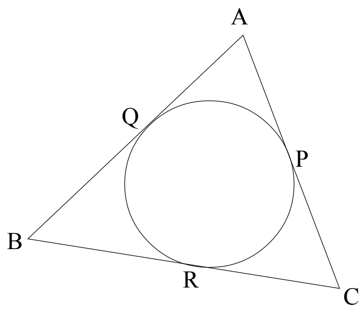
A യിലെ തൊടുവരയാണ് AP .
BC എന്ന ഞാൺ AP യ്ക്ക് സമാന്തരമാണ്. (2)
AB =AC എന്ന് തെളിയിക്കുക.

2) 

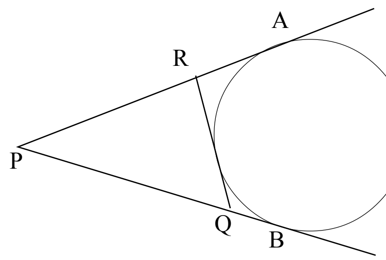
A, B കേന്ദ്രമായ വൃത്തങ്ങളുടെ
പൊതു തൊടുവരകളാണ്.
P Q, SR ഇവ
P Q = SR എന്ന് തെളിയിക്കുക. (2)

3) 

ചിത്രത്തിൽ C യിലെ തൊടുവരയാണ് CP
< A = 40^0 ആയാൽ
< EBC എത്ര ? EB || DC എന്ന് തെളിയിക്കുക. (3)
< DCP എത്ര ?
EF = CD എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4) 

വൃത്തം ത്രികോണത്തെ തൊടുന്ന (2)
ബിന്ദുക്കളാണ് P, Q , R
AB = 12
BC = 14
AC = 10
ആയാൽ തൊടുവരകളുടെ
നീളങ്ങൾ കാണുക.

5) 

Δ PQR ന്റെ ബാഹ്യവൃത്തം വരച്ചിട്ടുണ്ട്. (2)
PQ = 8
PR = 9
QR = 7
PA = എത്ര?

6) വശങ്ങൾ 13 സെ.മീ, 14 സെ.മീ, 15 സെ.മീ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്ത ആരം കണക്കാക്കുക. (2)

7. 36 cm^2 പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം നിർമ്മിക്കുക. ഇതിന്റെ തുല്യപരപ്പളവുള്ളതും ഒരു വശം 7 സെ.മീ ഉം ആയ ചതുരം നിർമ്മിക്കുക. (3)

8. AB = 8 cm , BC = 6cm, AC = 8 cm ആയ Δ ABC നിർമ്മിച്ച് അതിന്റെ AB, ACഎന്നീ വശങ്ങളെ തൊടുന്ന അർധവൃത്തം വരയ്ക്കുക. (3)

8
ഘനരൂപങ്ങൾ

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- സ്തൂപിക

  സമചതുര സ്തൂപിക

  സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദവക്ക്, പാർശ്വവക്ക്, ഉയരം, ചരിവുയരം, പാദവികർണ്ണം, ഇവ അറിയുന്നതിനും അവയുടെ പരസ്പരബന്ധം കണ്ടെത്തുന്നതിനും

  സമചതുര സ്തൂപികയുടെ പരപ്പളവ്

  സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

  വൃത്തസൂചിക

  വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ്

  വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം, ചരിവുയരം, പാദത്തിന്റെ ആരം ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

  വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം.

  ഗോളം- ഉപരിതല പരപ്പളവും വ്യാപ്തവും.

  അർധഗോളം- ഉപരിതലപരപ്പളവും വ്യാപ്തവും

മുന്നറിവ്

- ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം, സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്,

  വൃത്തം- ചുറ്റളവ്, പരപ്പളവ്, സെക്ടറിന്റെ ചാപനീളം, പരപ്പളവ്.

  സ്തംഭങ്ങളുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവും വ്യാപ്തവും.

പ്രവർത്തനം-1

- കാർഡ് ബോർഡിൽ നിർമ്മിച്ച വിവിധ വലുപ്പത്തിലുള്ള സമചതുരസ്തംഭങ്ങൾ കുട്ടികൾക്ക് നൽകുക. ഇവയിൽ ഒന്ന് നിവർത്തിയതിന്റെ മാതൃക കാണിക്കുന്നു. തുടർന്ന് സമചതുര സ്തംഭത്തിന്റെ അതേ പാദമുള്ളതും അഞ്ച് മൂലകളുള്ളതുമായ രൂപം നിർമ്മിക്കുന്നതിനുള്ള പ്രവർത്തനം നൽകുക.

പ്രവർത്തനം-2

- പാദമുഖങ്ങൾ ത്രികോണം, ചതുരം, ഷഡ്ഭുജം എന്നിവ ആയ സ്തംഭങ്ങൾ നൽകി നിർത്തിവെച്ച് മുകളിൽ പറഞ്ഞ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ ആവർത്തനം. ചർച്ചാ ക്രോഡീകരണം.

കണ്ടെത്താവുന്ന വസ്തുതകൾ
- സ്തൂപികയ്ക്കുള്ള പൊതുപ്രത്യേകതകൾ
- പാദമുഖം, പാർശ്വമുഖം
- പാദവക്ക്, പാർശ്വവക്ക്, ഉയരം
- ശീർഷം

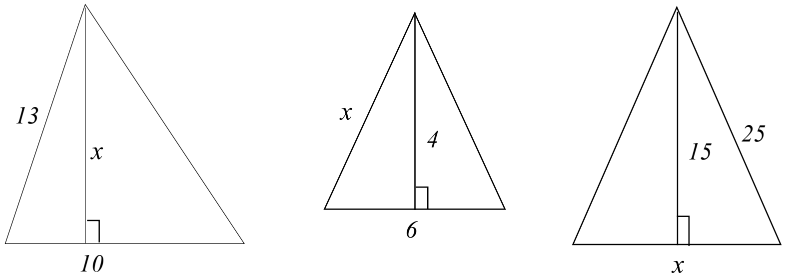
പ്രവർത്തനം-3

- ഏതാനും സമചതുര സ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന്റെ വശവും പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ അളവുകളും ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. പാദത്തിന്റെ വശത്തിന് ചേരുന്ന പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ അളവുകൾ തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

പാദത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ അളവ് (സെ.മീ)	പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ (സെ.മീ)
10	5, 6, 6
7	8, 10, 8
6	8, 8, 7
5	6, 9, 9
	8, 8, 8

പ്രവർത്തനം-4

- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമപാർശ്വ ത്രികോണങ്ങളിൽ x കാണുക.



ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കാണുക.

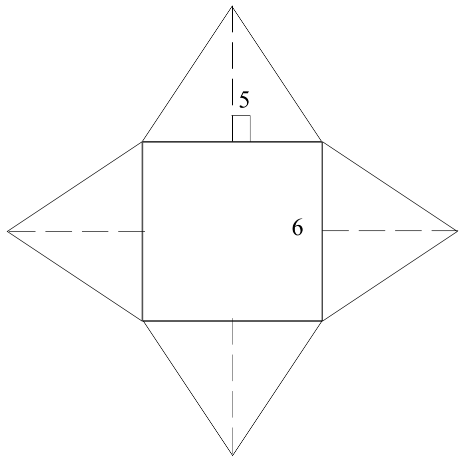
വർക്ക് ഷീറ്റ് 1

- സമചതുര സ്തൂപികയുടെ അളവുകൾ പട്ടികയായി കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. വിട്ടഭാഗം പൂരിപ്പിക്കുക.

പാദവക്ക്	ചരിവുയരം	ഉയരം	പാർശ്വവക്ക്	പാദപരപ്പളവ്	പാദചുറ്റളവ്	പാദവികർണം
6	5					
	15			324		
		24			40	
10			13			
40		15				
			25	225		
			20			24

വർക്ക് ഷീറ്റ് 2

- കടലാസ് കൊണ്ട് നിർമ്മിച്ച ഒരു സമചതുര സ്തൂപിക പൊളിച്ചു നിവർത്തിയ രൂപം ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

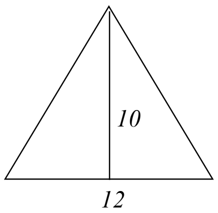


ത്രികോണങ്ങളെത്ര?
സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവെന്ത്?
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവെന്ത്?
4 ത്രികോണങ്ങളുടെയും ആകെ പരപ്പളവെന്ത്?
ഈ പരപ്പളവിന് സ്തൂപികയുമായുള്ള ബന്ധമെന്ത്?
സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് എത്ര?
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പാദം a , ഉയരം l ആയാൽ പരപ്പളവെത്ര?
പാദവക്ക് a , ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം l എന്നിവയെങ്കിൽ ഉപരിതല പരപ്പളവെന്ത്?

പ്രവർത്തനം -5

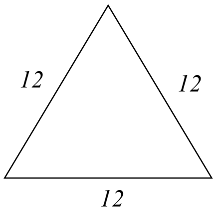
- ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ഒരു പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ ചിത്രം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

i) തന്നിരിക്കുന്ന പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര?
ii) സ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവെത്ര?
iii) പാദപരപ്പളവ് കാണുക?
iv) ഉപരിതല പരപ്പളവെത്ര?



പ്രവർത്തനം - 6

i) തന്നിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്ര?
ii) ഇത് പാർശ്വമുഖമായി വരുന്ന സ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ പരപ്പളവെന്ത്?
iii) പാദപരപ്പളവെത്ര?
iv) ഉപരിതല പരപ്പളവെന്ത്?
(സൂചന: സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{\sqrt{3}\,a^2}{4}$)



പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. പാദവക്കിന്റെ നീളം 10 സെ.മീ, ചരിവുയരം 15 സെ.മീ ആയ സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് കാണുക.
2. പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവ് 260 ച.സെ.മീ ആയ സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം 13 സെ.മീ എങ്കിൽ ഉപരിതല പരപ്പളവെന്ത്?
3. ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ എല്ലാ വക്കുകളും തുല്യമാണ്. വക്കുകളുടെ ആകെ നീളം 160 സെ.മീ ആയാൽ ഉപരിതല പരപ്പളവ് കാണുക.
4. പാദചുറ്റളവ് 160 സെ.മീ, ഉയരം 21 സെ.മീ ആയ സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് കാണുക.
5. രാജുവിന്റെ കയ്യിൽ പാദം 12 സെ.മീ ഉയരം 5 സെ.മീ ആയ 4 ത്രികോണങ്ങളും വശം 12 സെ.മീ ആയ ഒരു സമചതുരവും ഉണ്ട്. രാധയുടെ കൈവശം പാദം 10 സെ.മീ ഉയരം 6 സെ.മീ ആയ 4 ത്രികോണങ്ങളും വശം 10 സെ.മീ ആയ സമചതുരവുമാണുള്ളത്. ആർക്കാണ് സമചതുര സ്തൂപിക നിർമ്മിക്കാനാവുക? എന്തുകൊണ്ട്?

സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം.

ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം അതേ പാദവും ഉയരവുമുള്ള സമചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിലൊരു ഭാഗമാണ്.

സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം = $\frac{1}{3}$ x പാദപരപ്പളവ് x ഉയരം

പ്രവർത്തനം-7

പാദപരപ്പളവ് 25 ച.സെ.മീ, ഉയരം 12 സെ.മീ

ആയ സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തമെന്ത്?

വ്യാപ്തം = $\frac{1}{3}$ x പാദപരപ്പളവ് x ഉയരം

= $\frac{1}{3} \times 25 \times 12$

= 100 ഘന സെന്റീമിറ്റർ

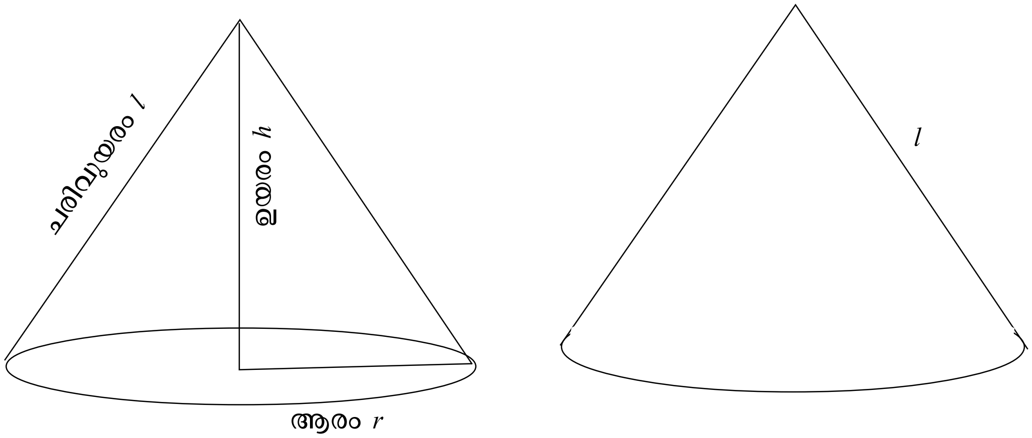
പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ് 60 സെ.മീ ഉയരം, 18 സെ.മീ ആയാൽ വ്യാപ്തം കാണുക.
2. പാദചുറ്റളവ് 64 സെ.മീ ചരിവുയരം 17 സെ.മീ ആയിട്ടുള്ള സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക.
3. ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖ പരപ്പളവ് 2320 ച.സെ.മീ, ഒരു പാദവക്കിന്റെ നീളം 40 സെ.മീ ആയാൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തമെന്ത്?
4. രണ്ടു സമചതുര സ്തൂപികകളുടെ പാദവക്കുകൾ 1:3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലും ഉയരങ്ങൾ 1:2 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുമാണ്. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം 400 ഘന സെന്റീമീറ്ററാണ്. രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്ര?
5. വക്കുകളെല്ലാം തുല്യമായ ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം 12 സെ.മീ ആണ്. സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക?
6. പാദവക്കിന്റെ നീളം 21 സെ.മീ വ്യാപ്തം 2940 ഘന സെന്റീമീറ്ററുമായ സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ഉയരമെന്ത്?
7. 3200 ഘന സെ.മീ വ്യാപ്തമുള്ള ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ഉയരം 24 സെ.മീ ആയാൽ പാദപരപ്പളവ്, ഉപരിതലപരപ്പളവ് ഇവ കാണുക?

വൃത്തസ്തൂപിക

പ്രവർത്തനം 1

കട്ടികടലാസുകൊണ്ട് നിർമ്മിച്ച വൃത്തസ്തൂപിക വിതരണം ചെയ്ത് അതിന്റെ ആരം ചരിവുയരം, ഉയരം എന്നിവ പരിചയപ്പെടുത്താം. തുടർന്ന് ഒട്ടിച്ച ഭാഗത്തിൽ കൂടി മുറിച്ച് പാദമുഖം, പാർശ്വമുഖം (വക്രമുഖം) എന്നിവ വേർപെടുത്തുക.



പാദമുഖം വൃത്തവും വക്രമുഖം വൃത്താംശവുമായി ലഭിക്കും.

സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം = വൃത്താശംത്തിന്റെ ആരം.

പ്രവർത്തനം 1

കട്ടിക്കടലാസിൽ വരച്ച 15 സെ.മീ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ നിന്ന 120^0 കേന്ദ്ര കോണുള്ള വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുക്കുക. അതിന്റെ ചാപനീളം കാണുക. അത് ഉപയോഗിച്ച് പരമാവധി വലുപ്പ മുള്ള വൃത്തസൂചിക ഉണ്ടാക്കുക. പാദമുഖമായി മുറിച്ചെടുക്കാവുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ആരമെത്ര ?

120^0 എന്നത് 360^0 യുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണല്ലോ?

വൃത്താശംത്തിന്റെ ചാപനീളം കേന്ദ്രകോണിന് ആനുപാതികവുമാണ്. അതിനാൽ വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപനീളം വൃത്തപരിധിയുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം.

ആരങ്ങൾ ചുറ്റളവുകൾക്ക് ആനുപാതികം.

അതിനാൽ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം.

ആരം = 15 x $\frac{1}{3}$

= 5 സെന്റീമീറ്റർ

2. വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ ആരങ്ങൾക്ക് ആനുപാതികമാണ്.

വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ആരവും വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരവും (l) വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റള വിനും വൃത്തത്തിന്റെ (വൃത്താംശമുറിച്ച) ചുറ്റളവിനും ആനുപാതികമാണ്. അതായത് വൃത്താംശ ത്തിന്റെ ചാപനീളത്തിനും വൃത്തത്തിന്റെ ചാപനീളത്തിനും ആനുപാതികം.

വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 360^0 യുടെ എത്ര ഭാഗമാണോ വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ അത്രയും ഭാഗമാണ് സ്തൂപികയുടെ ആരം.

അതായത് $\frac{r}{l} = \frac{x}{360}$

3. 30 സെ.മീ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ നിന്നും ഒരു വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുത്ത് വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നു. പാദആരം 5 സെ.മീ ആകണമെങ്കിൽ വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ അളവെത്ര?

4. ആരം 27 സെ.മീ ആയ ഒരു വൃത്തത്തിൽ നിന്നും 20^0 കേന്ദ്രകോണുള്ള ഒരു വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുത്ത് ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക നിർമിച്ചാൽ അതിന്റെ ആരം എത്ര?

5. 72^0 കേന്ദ്രകോണുള്ള വൃത്താംശം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന് 314 ച.സെ.മീ പരപ്പളവുണ്ടെങ്കിൽ സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരമെന്ത്?

വക്രതലപരപ്പളവ്

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലപ്പരപ്പളവ് അതുണ്ടാക്കാനുപയോഗിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവിന് തുല്യമാണല്ലോ?

ആരം l ആയ ഒരു വൃത്തത്തിൽ നിന്നും x^0 കേന്ദ്രകോണിൽ മുറിച്ചെടുത്ത വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

$\frac{x}{360} \times \pi l^2$ ആണല്ലോ.

എന്നാൽ $\frac{x}{360} = \frac{r}{l}$ എന്ന് നമ്മൾ കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്.

$\therefore$ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= \frac{r}{l} \times \pi l^2$

$= \pi r l$

ഏതൊരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെയും പാർശ്വതലപരപ്പളവ്

$\frac{1}{2}$ = പാദചുറ്റളവ് x ചരിവുയരം ആണ്.

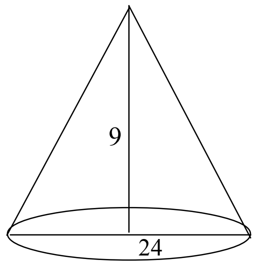
വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ് $= \frac{1}{2} \times 2 \pi r \times l$

$= \pi r l$

$\therefore$ ഉപരിതലപരപ്പളവ് $= \pi r^2 + \pi r l$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. 216^0 കേന്ദ്രകോണുള്ള വൃത്താംശം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന സ്തൂപികയുടെ ആരം 9 സെ.മീ ആയാൽ അതിന്റെ വക്രതലപരപ്പളവ് കാണുക.

2. 

ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവും ഉപരിതലപരപ്പളവും കാണുക.

3. വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള കടലാസുതൊപ്പിയുടെ പാദവ്യാസം 30 സെ.മീ, ഉയരം 20 സെ.മീ ആണ്. ഇത്തരം 2000 തൊപ്പികൾ നിർമ്മിക്കുന്നു. ഒരു ച.മീറ്റർ പേപ്പറിന് 10 രൂപ നിരക്കിൽ ആകെ എന്തു ചെലവുവരും?

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം പാദപരപ്പളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണ്.

പാദആരം = r , ആയരം h ആണെങ്കിൽ

$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

ഏതാനും വൃത്തസ്തൂപികകളുടെ അളവുകൾ താഴെ കൊടുക്കുന്നു.

1. പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക.

പാദ ആരം	ഉയരം	ചരിവുയരം	പാദചുറ്റളവ്	പാദപരപ്പളവ്	വക്രമുഖ പരപ്പളവ്	ഉപരിതല പരപ്പളവ്	വ്യാപ്തം
6	8	–	–	–	–	–	–
5	–	13	–	–	–	–	–
–	24	30	–	–	–	–	–
15	–	25	–	–	–	–	–
10	24	–	–	–	–	–	–
–	36	45	–	–	–	–	–
33	–	55	–	–	–	–	–
27	36	–	–	–	–	–	–
–	6	61	–	–	–	–	–

2. വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തടിക്കഷ്ണത്തിന്റെ പാദആരം 30 സെ.മീ, ഉയരം 80 സെ.മീ. ഇതിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?
3. വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിൽ കൂട്ടിയിരിക്കുന്ന മണലിന്റെ പാദചുറ്റളവ് 75.36 മീറ്ററാണ്. ചരിവുയരം 13 മീറ്ററാണ്. കൂട്ടിയിരിക്കുന്ന മണലിന്റെ വ്യാപ്തമെന്ത്? ഒരു ഘനമീറ്റർ മണലിന് 2000 രൂപാ നിരക്കിൽ മണലിന്റെ വിലയെന്ത്?
4. വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ പാദപരപ്പളവ് 64 π ച.സെ.മീ, വക്രതലപരപ്പളവ് 80 π ച.സെ.മീ എങ്കിൽ ഉള്ളളവ് എത്രലിറ്ററാണ്?
5. ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരവും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 5:12 ആണ്. സ്തൂപികക്ക് 2572 ഘ.സെ.മീ വ്യാപ്തമുണ്ടെങ്കിൽ വക്രതലപരപ്പളവ് കാണുക.
6. രണ്ട് വൃത്തസ്പൂതികകളുടെ ആരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3:4 ഉം ഉയരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 5:3 ഉം ആയാൽ വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധമെന്ത്?

ഗോളം (Sphere)

ഗോളത്തെ മുറിച്ചു നിവർത്തി ഉപരിതലപരപ്പളവ് കാണുന്നത് പ്രായോഗികമല്ല.

എന്നാൽ ആരം r എന്നെടുത്താൽ ഉപരിതലപരപ്പളവ് $4\pi r^2$ആണെന്ന് കാണാവുന്നതാണ്. കൂടാതെ വ്യാപ്തം $\frac{4}{3}\pi r^3$ ആണെന്നും തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

കട്ടിയായ ഒരു ഗോളത്തെ രണ്ട് തുല്യഭാഗമാകത്തക്കവിധത്തിൽ മുറിച്ചാൽ ഓരോന്നും അർധ ഗോളമായിരിക്കും.

ആരമായ അർധഗോളത്തിന്റെ,

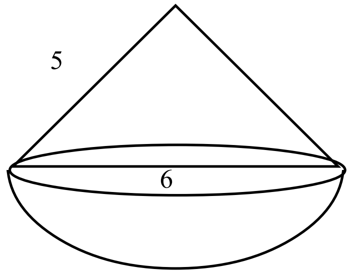
വക്രതലപരപ്പളവ് = $2\pi r^2$

ഉപരിതലപരപ്പളവ് = $3\pi r^2$

വ്യാപ്തം = $\frac{2}{3}\pi r^3$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. 30 സെ.മീ വ്യാസമുള്ള ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും വ്യാപ്തവും കാണുക.
2. 40 ച.സെ.മീ ഉപരിതലപരപ്പളവുള്ള ഒരു ഗോളത്തിനെ 2 അർധഗോളങ്ങളാക്കി മാറ്റിയാൽ ഓരോന്നിന്റെയും ഉപരിതലപരപ്പളവ് കാണുക.
3. ഒരു ഈയ വൃത്തസ്തംഭം ഉരുക്കി ചെറുഗോളങ്ങളാക്കി മാറ്റുന്നു. വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദആരം 6 സെ.മീ, ഉയരം 10 സെ.മീയും. ഗോളത്തിന്റെ ആരം 1 സെ.മീയും ആണെങ്കിൽ എത്ര ഗോളങ്ങൾ നിർമ്മിക്കാം?
4. അർധ ഗോളങ്ങളായ രണ്ട് പാത്രങ്ങളുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 4: 9 ആയാൽ അവയുടെ ഉള്ളളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്ത്?
5. ഒരു കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ ആകൃതി അർധഗോളത്തിൽ അതേ വ്യാസമുള്ള വൃത്തസ്തൂപിക ഘടിപ്പിച്ച രീതിയിലാണ്. വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം 5 സെ.മീ പൊതുവ്യാസം 6 സെ.മീ എങ്കിൽ കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.



6. 30 സെ.മീ പാദവ്യാസവും 25 സെ.മീ ഉയരവുമുള്ള പ്ലസ്റ്റർ ഓഫ് പാരീസിൽ നിർമ്മിച്ച കട്ടിയായ ഒരു സിലിണ്ടറിന്റെ മധ്യഭാഗത്തുനിന്നും പാദആരം 9 സെ.മീ, ഉയരം 15 സെ.മീ ആയ ഒരു വൃത്ത സ്തൂപിക തുരന്നുമാറ്റി ശേഷിക്കുന്ന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തമെന്ത്?

യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റ്

സ്കോർ : 25
സമയം : 1 മണിക്കൂർ

1. സമചതുര സ്തംഭാകൃതിയായ ഒരു തിടക്കഷ്ണത്തിന്റെ ഉയരം 24 സെ.മീ ഉം പാദവക്കിന്റെ നീളം 20 സെ.മീ ഉം ആയാൽ അതിൽ നിന്നും ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ സമചതുര സ്കൂപികയുടെ വ്യാപ്തമെന്ത്? (2)
2. കടലാസ് മുറിച്ച് ഒരു സമചതുര സ്കതൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. പാദവക്ക് 30 സെ.മീ ഉം ഉയരം 20 സെ.മീ ഉം വേണം. ത്രികോണങ്ങളുടെ അളവുകൾ എത്രയായിരിക്കും? (2)
3. 196 π ച.സെ.മീ ഉപരിതലപരപ്പളവുള്ള ഒരു ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തമെന്ത്? (3)
4. ലോഹം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ നീളം 20 സെ.മീ, ആരം 4 സെ.മീ ഉം ആണ്. ഇത് ഉരുക്കി 2 സെ.മീ ആരമുള്ള എത്ര ഗോളങ്ങളുണ്ടാക്കാം?
5. രണ്ട് വൃത്ത സ്തൂപികകളുടെ ആരംങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3:4 ഉം ഉയരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 5:3ഉം ആണ്. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം 450 ഘ.സെ.മീ ആയാൽ രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക. (3)
6. പാദവ്യാസം 24 സെ.മീ ഉയരം 15 സെ.മീ ആയ വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള കടലാസു തൊപ്പികൾ നിർമ്മിക്കുന്നു. ഇത്തരം 1000 തൊപ്പികൾ ഉണ്ടാക്കാൻ എത്ര ച.മീറ്റർ കടലാസു വേണം? ഒരു ചതുരശ്രമീറ്റർ കടലാസിന് 5 രൂപയാണ് വിലയെങ്കിൽ ആകെ എത്ര രൂപ ചെലവാകും? (4)
7, സമചതുര സ്തൂപികാകൃതിയിൽ നിർമ്മിക്കുന്ന ഒരു കൂടാരത്തിന് 6 മീറ്റർ ഉയരമുണ്ട്. പാദപരപ്പളവ് 256 ച.മീറ്റർ എങ്കിൽ കൂടാരം പൊതിയാനാവശ്യമായ ക്യാൻവാസിന് ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 200 രൂപ നിരക്കിൽ എന്ത് ചെലവുവരും? (4)
8. ഒരു കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ ആകൃതി ഒരു സിലണ്ടറിന്റെ ഒരഗ്രമുഖത്ത് അതേ ആരത്തിലുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയും രണ്ടാമത്തെ അഗ്രമുഖത്ത് അതേ ആരത്തിലുള്ള അർധഗോളവും ഘടിപ്പിച്ച രീതിയിലാണ്. ആകെ നീളം 30 സെ.മീ ഉം വൃത്തസ്തൂപികാ ഭാഗത്തിന്റെ ഉയരം 9 സെ.മീ ഉം ആണ്. പൊതുആരം 6 സെ.മീ എങ്കിൽ കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുക. (4)

9
ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- ഒരു വരയിലെ ഏത് രണ്ട് ബിന്ദുക്കളുടെയും x സൂചകസംഖ്യകളിലെ മാറ്റം y സൂചക സംഖ്യകളിലെ മാറ്റത്തിന് ആനുപാതകമാണ്.
- രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദു.
- രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്ന് പോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ്.
- രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്ന് പോകുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം.
- വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം.

ഉപആശയങ്ങൾ

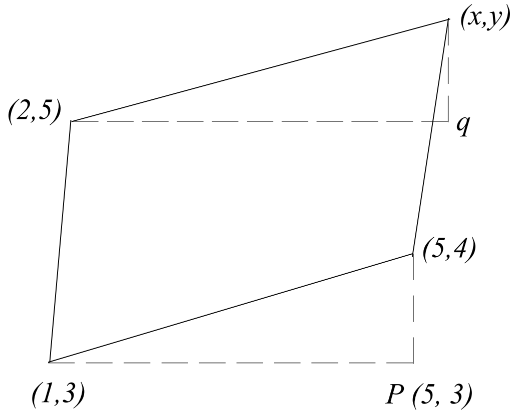
- ഒരു സാമാന്തരീകത്തിന്റെ മൂന്ന് ശീർഷങ്ങൾ തന്നാൽ നാലാമത്തെ ശീർഷത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാം.
- രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ ഒരു ബിന്ദു p : q എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഈ ബിന്ദുവിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

മുന്നറിവ്

- രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എന്ന ആശയം.
- ആനുപാതികത സ്ഥിരം എന്ന ആശയം.
- അകലം എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടെത്തുന്ന രീതികൾ.

<u>ഒരു സമാന്തരികത്തിന്റെ മൂന്ന് ശീർഷങ്ങളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ തന്നാൽ നാലാമത്തെ ശീർഷത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി.</u>

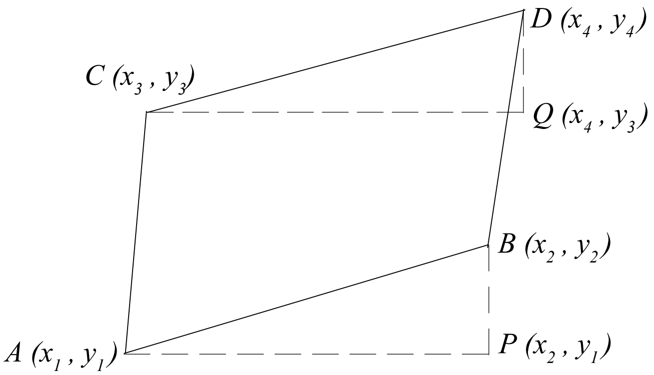
ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ മൂന്ന് മൂലകൾ (1, 3), (5,4), (2,5) എന്നിവയാണ് നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുക.



വിശദീകരണം

- ആദ്യം ഒരു ഏകദേശ ചിത്രം വരച്ച് മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക. നാലാമത്തെ ശീർഷം (x, y) എന്നിരിക്കട്ടെ. തുടർന്ന് P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. P (5, 3), Q (x, 5) എന്നും കിട്ടുമല്ലോ. P യിൽ നിന്നും (5,4) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം = |4-3|=1 യൂണിറ്റ്. Q വിൽ നിന്നും (x,y) യിലേക്കുള്ള അകലവും 1 യൂണിറ്റ്. അതിനാൽ y=5+1 =6. (1,3) എന്ന ശീർഷത്തിൽ നിന്ന് E യിലേക്കുള്ള അകലവും = |5-1|=4 യൂണിറ്റ്. അതിനാൽ (2, 5) ൽ നിന്നും Q വിലേക്കുള്ള വരയുടെ നീളം 4 യൂണിറ്റ് തന്നെ. അതുകൊണ്ട് $x = 2 + 4 = 6$

  നാലാമത്തെ ശീർഷത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (6, 6) എന്നാണല്ലോ. തുടർന്ന് താഴെകൊടുത്ത സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.



$PB = |y_2 - y_1| = y_2 - y_1$

$QD = |y_2 - y_1| = y_2 - y_1$

$AP = x_2 - x_1$

$y_4 = y_3 + y_2 - y_1$

$x_4 = x_3 + x_2 - x_1$

- വിശദീകരണത്തിന് ശേഷം, ഏതൊരു സമാന്തരികത്തിന്റെയും മൂന്ന് മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ തന്നാൽ നാലാമത്തെ ശീർഷത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്താമെന്നു വിശദീകരിക്കുന്നു.

ഇങ്ങനെ നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള എളുപ്പമാർഗം കണ്ടെത്തുന്ന പൊതുരീതിയിലെത്താം.

$$x_4 = x_2 + x_3 - x_1$$
$$y_4 = y_2 + y_3 - y_1$$

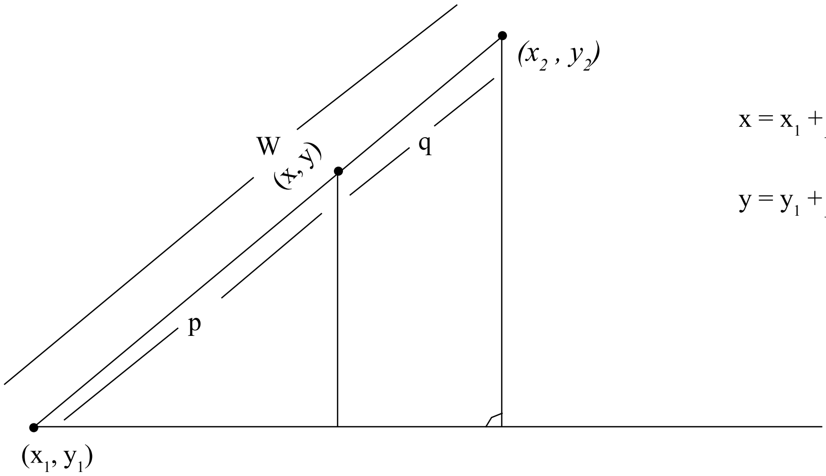
വർക് ഷീറ്റ് -2

തുടർന്ന് താഴെ കൊടുത്ത വർക് ഷീറ്റ് പൂർത്തിയാക്കുക.

സാമാന്തരീകത്തിന്റെ മൂന്ന് ശീർഷങ്ങൾ			നാലാമത്തെ ശീർഷം
(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)	$(x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$
(1, 1)	(3, 2)	(2,3)	-
(4,1)	(6, 2)	(5,3)	-
(-4, 1)	(-1, 2)	(-3, 4)	-
(0, 0)	(2,1)	(1,2)	-
(1, -1)	(3, -2)	(0, -3)	-

വർക് ഷീറ്റ് -3

(x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $p: q$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി. (വിശദീകരണം : ടെസ്റ്റ് ബുക്ക് പേജ്- 208)



$$x = x_1 + \frac{p}{w}(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + \frac{p}{w}(y_2 - y_1)$$

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	p:q	w= p + q	$x = x_1 + \frac{p}{w}(x_2 - x_1)$	$y = y_1 + \frac{p}{w}(y_2 - y_1)$
(2, 4)	(8, 7)	3: 5	8	$x = 2 + \frac{3}{8}(8 - 2)$ $= 2 + \frac{3}{8} \times 6$ $= 4\frac{1}{4}$	$y = 4 + \frac{3}{8} \times 3$ $= 4 + 1\frac{1}{8}$ $= 5\frac{1}{8}$
(0, 0)	(6, 6)	1: 1	2	-	-
(-4, 0)	(4, 6)	1: 2	3	-	-
(2, 1)	(6, 7)	2:3	-	-	-
(-2, -1)	(0, 5)	1: 4	-	-	-

(x_1, y_1) , (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

വരയുടെ ചരിവ്

(x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് *(slope)*

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

വർക് ഷീറ്റ് - 4

ഒരു വരയിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽ x മാറ്റവും y മാറ്റവും ആനുപാതികമാണ് എന്ന തത്വം ഉപയോഗിച്ച് വരയിലെ മറ്റു ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി.

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	x മാറ്റം	y മാറ്റം	വരയുടെ ചരിവ്	വരയുടെ മറ്റൊരുബിന്ദു
(3, 5)	(6, 7)	3	2	$\frac{2}{3}$	(9, 9)
(0, 2)	(6, 4)	6	2	$\frac{2}{6}$	(12, 6)
(3, 1)	(-2, 6)	-	-	-	-
(4, 7)	(6, 10)	-	-	-	-
-	(7, 11)	3	5	-	-
-	-	-2	3	-	(6 , 3)

വർക് ഷീറ്റ് - 5

രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് ഉപയോഗിച്ച് സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുന്ന രീതി.

വരയിലെ ഒരു ബിന്ദു	വരയിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദു	വരയുടെ ചരിവ്	വരയിലെ മൂന്നാമതൊരു ബിന്ദു	വരയുടെ സമവാക്യം
(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	(x , y)	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(6, 4)	(12, 6)	$\frac{6 - 4}{12 - 6} = \frac{2}{6}$	(x , y)	$\frac{y - 4}{x - 6} = \frac{2}{6}$ or $6(y-4) = 2(x-6)$ or $x-3y+6=0$
(7, 3)	(10, 5)	-	(x , y)	-
(5, -3)	(8, 0)	-	(x , y)	-
(-4, 5)	(6, 3)	-	(x , y)	-

വർക് ഷീറ്റ് - 6

ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദു കേന്ദ്രവും ഒരു നിശ്ചിത ആരവുമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുന്ന വിധം.

വൃത്തകേന്ദ്രം	ആരം	വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു	സമവാക്യം	വിസ്തരിച്ച രൂപം
(a, b)	r	(x, y)	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$	$x^2 + y^2 - 2ax - 2by+a^2+b^2-r^2=0$
(4, 6)	3	(x,y)	$(x-4)^2 - (y-6)^2 = 3^2$	$x^2 + y^2 - 8x - 12y+43 = 0$
(1, 3)	4	(x, y)	-	-
(-2, 4)	5	(x-y)	-	-
(1, 3)	5	-	-	-
(0, 0)	6	(x, y)	-	-

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. (0, 1), (2, 2), (4, 3), (6, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ പരിഗണിക്കുക.

- (0, 1), (2, 2) എന്നീ സംഖ്യാജോടികളിൽ x സൂചകസംഖ്യ 2 കൂടുമ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ എത്ര കുടന്നു?
- (2, 2), (4, 3) എന്നീ സംഖ്യജോടികളിൽ x സൂചകസംഖ്യ 2 കൂടുമ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ എത്രകൂടുന്നു?
- (2, 2), (6, 4) എന്നീ സംഖ്യജോടികളിൽ ഈ മാറ്റം എങ്ങനെയാണ്?
  അങ്ങനെയെങ്കിൽ x സൂചകസംഖ്യ 1 കൂടുമ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ എത്ര കൂടണം?
- ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഉൾപ്പെട്ട വരയുടെ ചരിവ് എന്താണ് ?

2. (2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ചരിവ് ½ ആയി വരക്കുന്ന വരയിലെ മറ്റ് രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ എഴുതുക?
3. (1,4), (5,2), (⁻3, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.
4. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി ബിന്ദുക്കളെയും തമ്മിൽ യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.

1. A (2,1), B (4, 2)
2. E (1,2) , F (2 , 0)
3. G (2,1), H (0, 2)
4. C (1, 2) , d (2, 4)

5. $3x - y - 6 = 0$, $x + 3y - 12 = 0$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങളായ വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു ഏതാണ്? ഓരോ വരയിലെയും മറ്റൊരു ബിന്ദു കൂടി എഴുതുക. ഈ വരകൾ പരസ്പരം ലംബമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.
6. $2x - 3y - 12 = 0$ എന്ന വരയുടെ ചരിവ് എത്രയാണ്? ഇതേ ചരിവുള്ള മറ്റൊരു വര (5, 2) എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുമെങ്കിൽ ആ വരയുടെ സമവാക്യം എന്താണ്?
7. (3, 2) എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 4 സെ.മീ ആകുന്നു. വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം എഴുതുക.
8. A (5, 3), B (8, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് വരയ്ക്കുന്ന വരയിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവായ c ഈ വരയെ 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു. C യുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.
9. ഒരു സാമാന്തരീകത്തിന്റെ അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് ശീർഷകങ്ങളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ താഴെ കൊടുക്കുന്നു. നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എത്ര?
   E (3, -2), F (6, 1), G (4, 3)
10. രണ്ടു വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ $4x - 5y - 6 = 0$. $5x + 4y + 13 = 0$ എന്നിങ്ങനെയാണ്.

a) ഇവ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
b) ഓരോ വരയിലേയും മറ്റൊരു ബിന്ദുകൂടി കണ്ടുപിടിക്കുക.
c) ഈ വരകൾ പരസ്പരം ലംബമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റ്

സ്കോർ : 25
സമയം : 1 മണിക്കൂർ

1. (4, 6), (5, 8) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ് എത്ര? ഈ വരയ്ക്ക് സമാന്തരവും (7, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യം എന്ത്? (3)
2. (4, 7), (6, 10) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന വരയിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവായ B , വരയെ 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു. B യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക? (3)
3. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം (2, 2) ആണ്. ഈ വൃത്തത്തിന് 3 സെ.മീ ആരമുണ്ടെങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം എഴുതുക? (3)
4. (1, -3), (-2, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണോ (4, -11) എന്ന് പരിശോധിക്കുക? (3)
5. PQR ൽ $P(-5, -4), Q(3, -8), R(-3, -10)$ ആണെങ്കിൽ

a) ത്രികോണം PQR ന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കുക?

b) പരിവൃത്ത ആരം എത്ര? (4)

6. $5x + 4y - 2 = 0, 5x + 4y - 4 = 0$ എന്നിവ രണ്ട് വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങളാണ്. ഈ രണ്ടു വരകളും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക? (4)
7. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവാണ്. ഈ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ്. (0, 5) ഈ വൃത്തത്തിലെ മറ്റ് 5 ബിന്ദുക്കൾ എഴുതുക? (5)

യൂണിറ്റ് 10
ബഹുപദങ്ങൾ

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുന്നു.
- ഘടകമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കൽ.
- ഒരു ബഹുപദത്തെ മറ്റൊരു ബഹുപദം കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നത്.
- ബഹുപദത്തിലെ ശിഷ്ടം.

വർക്ക് ഷീറ്റ്- 1

8- 7 + 5 - 1 = ...

18 - 10 - 2 + 1 = ...

25 - 15 - 8 - 2 = ...

-10 - 2- 4 + 6 = ...

5x 4 + 7 x 2 + 3 = ...

3 x 8 + 6 x 4 - 5 x 2 - 1 = ...

2 x 3^3 +4 x 3^2 - 2 x + 5 = ...

7 x 1^3 - 5 x 1^2 - 4 x 1 + 10 =...............

- P (x) = $2x^3 + 5x^2 + 6x - 4$ ആയാൽ

  p (1), P (2), P (O), P (-1) ഇവ കാണുക.

  P (1) = 2 x 1^3 + 5 x 1^2 + 6 x 1 - 4 = ...

  P (2) = ...

  P (O) = ...

  P ($^-$1) = ...

  ഏതാനും ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ ഇവയുടെ പ്രത്യേകതകൾ കണ്ടെത്താമല്ലോ?

- P (x) = x3 - 6x^2 - 4x + 6 ആയാൽ

  P (1), P (o) , p (½), P ($^-$½) ഇവ കാണുക.

വർക്ക് ഷീറ്റ്- 2

2x 5=10 ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് 2, 5.

12 നെ 2 സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലരൂപത്തിൽ എങ്ങനെയൊക്കെ എഴുതാം?

12= ....x ...., ...x............, ...x.............

12ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്..

20നെ 2 സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലരൂപത്തിൽ എഴുതുക.

.............................., ..., ..., ...

20ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്............, ..., ..., ..., ...

19= 5 x 3 + 4

19നെ 5 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലം 3 ഉം ശിഷ്ടം 4 ഉം ആണ്.

ഇതുപോലെ 17 = 2 x .... + ...

17നെ 2 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലം ....

ശിഷ്ടം...................................

17ന്റെ ഘടകമാണോ 2 ?

17 = 3 x .... + ...

17 നെ 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ.

ഹരണഫലം .... ശിഷ്ടം.......................

17നെ 7 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലം .... ശിഷ്ടം.................................

> a എന്ന പൂർണ സംഖ്യയെ b എന്ന പൂർണ സംഖ്യ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹരണഫലം q വും ശിഷ്ടം r ഉം ആയാൽ
> $a = qb + r$ ആയിരിക്കും.
> q, r ഇവ പൂർണസംഖ്യകളായിരിക്കണം.
> $r = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $0 < r < |b|$ ആയിരിക്കും.

പ്രവർത്തനം - 1

$(x - 2)(x + 2) =$ ....

$(x - 5)(x - 5) =$ ....

$(x - y)(x + y) =$ ....

$x^2 - 4 =$ (.............. + ...) (.............. - ....)

$x^2 - 25 =$ (........................) (.................)

$x^2 - 36 =$ ....

$x^2 - 100 =$ ....

$x^2 - \frac{1}{4} =$ ....

$x^2 - \frac{1}{9} =$ ....

$x^2 - 4$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് $(x + 2)$, $(x - 2)$

$x^2 - 25$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് ....

$x^2 - 36$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്......................................

$x^2 - 100$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് ....

P (x) എന്ന ബഹുപദം q (x), r (x) എന്നീ ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണെങ്കിൽ q (x), r (x)ഇവയെ P (x) ന്റെ ഘടകങ്ങൾ എന്നുപറയുന്നു.

പ്രവർത്തനം - 2

$(x + 2)(x + 3) = x^2 + (3+2)x + 3 \times 2 = x^2 + 5x + 6$

(x+3) (x+4) =..

(x+1) (x+2) = ...

(x-1) (x-2) = ...

(x-3) (x-4) = ...

(x-2) (x-3) = ...

$x^2 + 5x + 6$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് .... , ...

$x^2 + 7x + 12$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് .... , ...

$x^2 + 3x + 2$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് .... , ...

$x^2 - 3x + 2$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് .... , ...

$x^2 - 7x + 12$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് .... , ...

$x^2 - 5x + 6$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് .... , ...

$x^2 - 8 + 12$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് .... , ...

$x^2 - 15x + 150$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് .... , ...

P (x)	ഘടകങ്ങൾ			P (x)= 0ആയാൽ x ന് പകരം ആയി എടുക്കേണ്ട സംഖ്യകൾ
$x^2 - 3x + 2$	P(x) = (x-a) (x-2)	P (1) = 0	P (2) = 0	1, 2
$x^2 - 3x + 6$	P (x) = ( ) ( )	P (2) = ...	P (3) =......	.... , ...
$x^2 - 7x + 12$	P (x) = ...	P (3) = ...	P (4)=	.... , ...
x2 - 6x + 5	P (x) = ...	P (1) = ...	P (5)=	.... , ...
$x^2 - (a+b)x + ab$	P (x)=	P (a) = ...	P (b) = ...	.... , ...

P (x) = (x-1) (x-2) (x- 3)

P (1) = ... , P (2) = ..., P (3) = ...

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളാണ് .... , ... , ...

x - a എന്ന ഒന്നാം കൃതി ബാഹ്യപദം P (x) എന്ന ബാഹ്യപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെങ്കിൽ P (a) = 0 ആണ്. P (x) എന്ന ബഹുപദത്തെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി $P(x) = (x-a_1)(x-a_2) \ldots\ldots (x-a_n)$ എന്നു പിരിച്ചെഴുതാൻ കഴിഞ്ഞാൽ P (x) = O സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളാണ് $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$

- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക? ഓരോന്നിലും P (x) എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളും കാണുക?

i) $P(x) = x^2 - 8x + 12$

ii) $P(x) = x^2 - 8x + 15$

iii) $P(x) = x^2 - ax + 18$

iv) $P(x) = x^2 - 6x + 8$

v) $P(x) - x^2 - (a+b)x + ab$

vi) $P(x) = x^2 - x - 12$

പ്രവർത്തനം - 3

$x^2 + 2x - 15 = 0$ എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരം കാണുക?

$x^2 + 2x - 15 = (x-a)(x-b)$

$- x^2 - (a+b)x + ab$

$x^2 - (a+b)x + ab = x^2 + 2x - 15$

$\therefore$ സമവാക്യത്തിലെ ഇരുവശത്തുമുള്ള ഗുണകങ്ങൾ തുല്യമാവണം.

$a + b = -2$

$ab = -15$

ഗുണനഫലം -15ഉം തുക - 2 മായ 2 സംഖ്യകൾ a, b ഇവ കാണണം.

$3 \times {}^-5 = {}^-15$

$3 + {}^-5 = {}^-2$

$\therefore x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x-{}^-5)$

$\therefore x^2 + 2x - 15$എന്ന സമവാക്യ പ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ 3, $^-5$

> 15= 1x15
> 3 x 5
> ഗുണനഫലം ന്യൂനസംഖ്യ യാവാൻ ഒരു സംഖ്യ ന്യൂനം തുക ന്യൂനസംഖ്യയായതിനാൽ വലിയ സംഖ്യ
> $3 + {}^-5 = -2$

- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

i) $x^2 - 4x + 1$

ii) $x^2 + 8x - 65$

വർക്ക് ഷീറ്റ്

> $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ah$
> $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

- ചുടവടെ കൊടുത്ത പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക.

(a+b)	$(a+b)^2$	ab	$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
10	100	16	100- 4x16 = 100 - 64 = 36
14	....	48	....
12	....	35	....
8	....	2	....
$\frac{3}{4}$	....	$\frac{1}{8}$	....

പ്രവർത്തനം - 4

$x^2 - 2x - 2 = 0$ എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരം കാണുക?

a + b = ...

ab = ...

$a + b = 2$ ഉം $a \times b = {}^-2$ ഉം ആയ സംഖ്യകൾ ഏവ?

a + b യും a - b യും കിട്ടിയാൽ ab ഇവ കാണാമല്ലോ?

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

$= 2^2 - 4 \times {}^-2 = 12$

$a-b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$a + b = 2$ or $a + b = 2$

$a - b = 2\sqrt{3}$ $\quad$ $a - b = -2\sqrt{3}$

$2a = 2 + 2\sqrt{3}$ $\quad$ $2a = 2 - 2\sqrt{3}$

$a = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{2}$ $\quad$ $a = \frac{2(1-\sqrt{3})}{2}$

$a = 1 + \sqrt{3}$ $\quad$ $a = 1 - \sqrt{3}$

$a + b = 2 \; ; \therefore \; b = 2 - a$

$b = 2 - (1 + \sqrt{3})$ $\quad$ $b = 2 - (1 - \sqrt{3})$

$= 1 - \sqrt{3}$ $\quad$ $= (1 + \sqrt{3})$

ഘടകങ്ങൾ

$x^2 - 2x - 2 = [(x - (1+\sqrt{3})] \; [(x - (1-\sqrt{3})]$

$= (x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3})$

അല്ലെങ്കിൽ

$x^2 - 2x - 2 = [(x - (1-\sqrt{3})] \; [(x - (1+\sqrt{3})]$

$= (x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3})$

$\therefore \; x^2 - 2x - 2 = (x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3})$

- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രണ്ടാംകൃതി സംഖ്യാപദങ്ങളെ ഒന്നാംകൃതി ബാഹ്യപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

i) $x^2 - 4x + 1 = 0$

ii) $x^2 - 2x - {}^-3 = 0$

പ്രവർത്തനം - 5

$3x^2 + 5x - 2 = 0$ എന്ന സമവാക്യ പ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരം കാണുക?

ഒന്നാംകൃതി ബാഹ്യപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാമല്ലോ?

$3x^2 + 5x - 2 = 3$ (...................................)

$x^2 + \frac{5x}{3} - \frac{2}{3}$ നെ ഒന്നാംകൃതി ബാഹ്യപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാമല്ലോ?

$a + b = \frac{-5}{3}$

$a + b = \frac{-2}{3}$

$(a+b)^2 = \left(\frac{-5}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{-2}{3} = \frac{25}{9} + \frac{8}{3} = \frac{25}{9} + \frac{24}{9}$

$= \frac{49}{9}$

$a-b = \pm \sqrt{\frac{49}{9}} = \pm \frac{7}{3}$

$a + b = \frac{-5}{3}$ $\qquad$ $a + b = \frac{-5}{3}$

$a - b = \frac{-7}{3}$ $\qquad$ $a - b = \frac{-7}{3}$

$2a = \frac{2}{3}$

$a = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $2a = \frac{-12}{3} = -4$

$a = -2$

$b = \frac{-5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{-6}{3} = -2$ $\qquad$ $b = \frac{-5}{3} + 2 = \frac{1}{3}$

$\therefore x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = (x - \frac{1}{3})(x - {}^-2)$

$= \frac{(3x-1)}{3}(x+2)$

$3x^2 + 5x - 2 = (3x-1)(x+2)$

$\frac{1}{3}$, -2 ഇവ $3x^2 + 5x - 2$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളാണ്.

- ചുവടെ കൊടുത്ത രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ ഒന്നാം കൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

(i) $4x^2 - 4x - 3$
(ii)

- $x^2 + 2x + 5 = 0$ എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരം കാണുക?

  a + b = ...

  a - b = ...

  $(a-b)^2 = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$

  ഒരു സംഖ്യയുടെയും വർഗം ന്യൂനസംഖ്യയാവില്ലല്ലോ?

  ∴ ഈ സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമില്ല.

- ചുവടെ കൊടുക്കുന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫല മായി എഴുതാമോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

  (i) $x^2 + 1$ $\qquad$ (i) $x^2 + x + 2$

പ്രവർത്തനം - 6

15 = 3 x 5	24 = 6 x 4
16 = 3 x 5 + 1	25 = 6 x ..... + ...
17 = 3 x 5 + 2	26 = ...
	27= ....
	28= ....
	29= ....

$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

$x^2 + 5x + 7 = x^2 + 5x + 6 + 1 = (x+3)(x+2) + 1$

$x^2 + 5x + 8 = (x + 3)(x + 2) + 2$

$x^2 + 5x + 4 = (x + 3)(x + 2) - 2$

$x^2 - 7x + 12$ = ...

$x^2 - 7x + 13$ = ...

$x^2 - 7x + 14$ = ...

$x^2 - 7x + 11$ = ...

$x^2 - 7x + 10$ = ...

- $x^2 - 7x + 14$ നെ $x - 3$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള ഹരണഫലം = ..., ശിഷ്ടം ....
- $x^2 - 7x + 12$ ന്റെ ഫലമാണോ $(x - 3)$
- P (x) എന്ന ബഹുപദത്തിൽ P (1) = 5 ആയാൽ P (x) ന്റെ ഘടകമാവുമോ x-1 ?
  (സൂചന: x - 1 ഘടകമാവാൻ P (1) = 0 ആവണം)
  $P(1) \neq 0 \quad \therefore$ x-1 ഘടകമല്ല.

> P (x) എന്ന ബഹുപദത്തിൽ x ന് a എന്ന സംഖ്യ കൊടുക്കുമ്പോൾ $P(a) \neq 0$ എങ്കിൽ x - a എന്ന ബഹുപദം P (x) എന്ന ബഹുപദത്തന്റെ ഘടകമല്ല.

- ചുവടെ കൊടുക്കുന്ന ഒരു ജോടി ബഹുപദങ്ങളിലും ആദ്യത്തേത് രണ്ടാമത്തേതിന്റെ ഘടകമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക?
  (i) $(x-1)$, $(x^3 - 5x + 9)$
  (ii) $(x - 2)$, $(x^3 - 2x^2 + x - 1)$
  (iii) $(x + 1)$, $(x \;\; + 5x^2 - 7x - 8)$

പ്രവർത്തനം - 7

- $x^2 + 7x + 10 = (x-2)(x-5)$ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക?
- $x^2 + 7x + 11 = (x-2)(x-5) + 1$
  $x^2 + 7x + 11$ നെ $(x-2)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലം ...., ശിഷ്ടം......................
- $x^2 + 7x + 12$ = ... + ...
- $x^2 - 7x + 12$ നെ $(x-2)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലം......................... , ശിഷ്ടം....................
- $x^2 - 7x + 9$ നെ $(x-2)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലം.........................., ശിഷ്ടം.....................
- $x^2 - 11x + 9$ നെ $x - 5$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും എത്ര?
  $x^2 - 11x + 11 = (x - 5)$ .... + ...
  $x^2 - 11x + 11 = (x - 5)(x - a) + b$
  $x^2 - 11x + 11 = x^2 - (a + 5)x + 5a + b$
  ഗുണകങ്ങൾ തുലനം ചെയ്താൽ

$a + 5 = 11$, $a = 11 - 5 = \underline{6}$

$5a + b = 11$, $5 \times 6 + b = 11$, $b = 11 - 30 = -19$

$x^2 - 11x + 11 = (x-5)(x-6) - 19$

$x^2 - 11x + 11$ നെ $x - 5$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള ഹരണഫലം $x - 6$ ഉം ശിഷ്ടം -19 ഉം ആണ്.

- $x^2 - 7x - 6$ നെ $x - 1$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക?
- $x^2 - 10x + 27$ നെ $x - 3$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക?

പ്രവർത്തനം - 8

- $x^3 - x^2 - 4x + 5$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക.

സൂചന :

$x^3 - x^2 - 4x + 5 = (x-2)$ ....+ ....

$x^3 - x^2 - 4x + 5$ നെ കൃതി

$x - 2$ നെ കൃതി

ഒരു ബഹുപദത്തെ $x - 2$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ

മൂന്നാംകൃതി ബാഹ്യപദം കിട്ടണമെങ്കിൽ ആ ബഹുപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം എന്താവണം? ....

ഹരണഫലത്തെ എങ്ങനെ എഴുതാം?

$x^3 - x^2 - 4x + 5 = (x-2)(x^2 + ax + b) + c$

$x^3 - x^2 - 4x + 5 = x^3 + (a-2)(x^2 + (b - 2a)x - 2b + c$

ഗുണകങ്ങൾ തുലനം ചെയ്താൽ

$a - 2 = -1$, $a = -1 + 2 = 1$

$b - 2a = -4$, $b - 2 \times 1 = -4$, $b = {}^{-}4 + 2 = {}^{-}2$

${}^{-}2b + c = 5$, $c = 5 + 2b = 5 + 2x = {}^{-}2$

$= 5 + 4 = 1$

$(x^3 - x^2 - 4x + 5) = (x - 2)(x^2 + x - 2) + 1$

ഹരണഫലം $x^2 + x - 2$,   ശിഷ്ടം $= 1$

- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി ബഹുപദത്തിലും ആദ്യത്തേതിനെ രണ്ടാമത്തേതുകൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക?

(i) $x^2 - 3x + 5$, $x - 1$

(ii) $x^3 - 2x^2 - x + 2$; $x + 1$

(iii) $x^3 + x^2 - 14x$; $x + 2$

പ്രർത്തനം - 9

- P (x) എന്ന ഒരു ബഹുപദവും x -a എന്ന ബഹുപദവുമെടുത്താൽ

  $P(x) = (x-a)\, q(x) + b$

  എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന തരത്തിൽ q (x) എന്ന ബഹുപദവും 'b' എന്ന സംഖ്യയും കണ്ടുപിടിക്കാം.
- P (x) എന്ന ബഹുപദം x - a യുടെ ഗുണിതമല്ല. എങ്കിൽ P (x) ൽ നിന്ന് ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കുറച്ച് P (x) നെ x - a യുടെ ഗുണിതമാക്കാം.

- $x^3 - 3x^2 - 13x + 20$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ നിന്ന് ഏതു സംഖ്യ കുറച്ചാലാണ് $x - 5$ ന്റെ ഗുണിതം ലഭിക്കുന്നത്?

  $x^3 - 3x^2 + 13x + 20 = (x-5)(x^2 + ax + b) + c$

  $x^3 - 3x^2 - 13x + 20 - c = (x-5)(x^2 + ax + b)$

  ഇവിടെ നിന്നും c കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ?

  ഇവിടെ നമുക്ക് c മാത്രമേ ആവശ്യമുള്ളൂ. അതുമാത്രമായി എളുപ്പം കണ്ടുപിടാക്കാമോ?

  x ആയി ഏതു സംഖ്യയെടുത്താലും സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരു വശങ്ങളും തുല്യമാവണം.

  x ആയി 5 എടുത്താലോ?

  $5^3 - 3 \times 5^2 - 13 \times 5 + 20 - c = 0 \times (x^2 + ax + b)$

  $125 - 75 - 65 + 20 - c = 0$

  $5 - c = 0$

  $\underline{c = 5}$

  5 കുറച്ചാൽ മതി.

  ഈ രീതിയെ ഒന്നുകൂടി ചുരുക്കി എഴുതാമോ?

  $x^3 - 3x^2 - 13x + 20 - c = (x-5)\, q(x)$

  $5^3 - 3 \times 5^2 - 13 \times 5 + 20 - c = 0 \times q(x)$

  $c = 5$

- $x^3 - 5x^2 + 2x + 10$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ നിന്ന് ഏത് സംഖ്യകുറച്ചാലാണ് $x-2$ ന്റെ ഗുണിതം ലഭിക്കുന്നത്.
- $2x^3 - x^2 - 5x$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ നിന്ന് ഏത് സംഖ്യകുറച്ചാലാണ് $x + 1$ ന്റെ ഗുണിതം ലഭിക്കുന്നത്.
- $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x + 5$ എന്ന ബഹുപദത്തെ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള ശിഷ്ടം എത്ര?
- $P(x) = (x-a)\, q(x) + b$

  x ന്റെ ഏതു വിലയ്ക്കാണ് ബഹുപദത്തിന്റെ വില ശിഷ്ടത്തിന് തുല്യമാവുന്നത്.

  $x - a$ ആയാൽ

  $P(a) = o \times q(a) + b = b.$

  $x - a$ ആയാൽ $b = P(a)$

> $P(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $(x-a)$ എന്ന ബഹുപദം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം $P(a)$ എന്ന സംഖ്യയാണ്.

പ്രവർത്തനം-10

> $P(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ x ന് a എന്ന സംഖ്യ കൊടുക്കുമ്പോൾ $P(a) = 0$ ആണെങ്കിൽ $x-a$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം $P(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്.

- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി ബഹുപദങ്ങളിലും ആദ്യത്തേത് രണ്ടാമത്തേതിന്റെ ഘടകമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക? ഘടകമല്ലെങ്കിൽ ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എഴുതുക?

  i) $x - 2, x^2 - 5x + 6$

  ii) $x - 3 , x^3 + 2x^2 + 11x -12$

  iii) $x + 1 , x^3 + 3 x^2 + 5 x -6$

  iv) $x + 2 , 2 x^3 - x^2 - x +1$

  v) $x - 1 , 2 x^3 - 3 x^2 + 5x - 4$

$P(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $ax + b$ എന്ന ബഹുപദം കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ശിഷ്ടം $P\left(\frac{-b}{a}\right)$ ആയിരിക്കും.

- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി ബഹുപദങ്ങളിലും ആദ്യത്തേത് രണ്ടാമത്തേതിന്റെ ഘടകമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക? ഘടകമല്ലെങ്കിൽ ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എഴുതുക?

  i) $2 x - 1, 2 x^3 - 7x^2 + 7x -1$

  ii) $3 x + 1, 3 x^3 - 3x^2 - 5x -2$

  iii) $2 x - 3, 2 x^3 + 15x^2 - 8x -10$

  iv) $2 x + 3, 2 x^3 + 5x^2 - x - 6$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. ചുവടെയുള്ള രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങലെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക. ഓരോന്നിലും $P(x) = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളും എഴുതുക?

   i) $p(x) = x^2 - 3x + 2$

   ii) $p(x) = x^2 - 22x + 85$

   iii) $p(x) = 2x^2 - 5x + 2$

   iv) $8x^2 + 10x - 3$

   v) $6x^2 - 11x + 3$

   vi) $18x^2 + 3x - 3$

2. $p(1) = 0, p(-1) = 0$ ആകുന്ന ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം കണ്ടുപിടിക്കുക?
3. $p(\sqrt{2}) = 0, p(\sqrt{3}) = 0$ ആകുന്ന ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം കണ്ടുപിടിക്കുക?
4. $p(1+\sqrt{2}) = 0, p(1-\sqrt{2}) = 0$ ആകുന്ന ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം കണ്ടുപിടിക്കുക?
5. $p(1) = 0, p(2) = 0, p(-3) = 0$ ആകുന്ന ഒരു മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദം കണ്ടുപിടിക്കുക?
6. ബഹുപദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

   $x^2 + 5x + k$ യുടെ ഘടകമാണ് $x- 1$ എങ്കിൽ k എത്ര?
7. $x^2 + ax + b$ ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x - 2, x - 3$ ഇവയെങ്കിൽ a, b ഇവയുടെ വിലകാണുക?
8. $x^2 + px + q$, $x^2 + mx + n$ എന്നീ ബഹുപദങ്ങളുടെ ഒരു പൊതുഘടകമാണ് $x + a$ എങ്കിൽ $a(m-p) = n-q$ എന്ന് തെളിയിക്കുക?
9. $2x^3 + kx^2 + 5x - 6$ നെ $x -1$ കൊണ്ട് ഹരിക്കമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം 5 ആയാൽ k എത്ര?
10. ചുവടെയുള്ള ഒരു ജോടി ബഹുപദങ്ങളിലും ആദ്യത്തേത് രണ്ടാമത്തേതിന്റെ ഘടകമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഘടകമല്ലെങ്കിൽ ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എഴുതുക?

    i) $x + 2$, $x^2 - 8n - 16$

    ii) $(x +5)$, $x^2 + 11x + 28$

    iii) $3x + 2$, $3x^3 - 3x^2 - 2x^2 - 3x + 2$

    iv) $x - 1$, $x^3 + 7x^2 + 7x -15$
11. ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ബഹുപദങ്ങളിലും ആദ്യത്തേതിനെ രണ്ടാമത്തേതുകൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കണക്കാക്കുക.

    i) $x^2 - 7x + 5$, $x-2$

    ii) $2x^3 + 3x^2 +4x + 7$, $2x + 3$

    (iii) ....

    (iv) ....
12. $ax^3 + bx^2 - ax - b$ യുടെ ഘടകമാണോ $x - 1$ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. $x - 1$ ഘടകമായ ഒരു മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദം എഴുതുക.
13. $x - 1$ ഘടകമായ ഒരു മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദം എഴുതുക? ഇതിന്റെ ഘടകമാണോ $x + 2$ എന്ന് പരിശോധിക്കുക?
14. $p(x) = 6x^3 + 3x^2$. $p(x)$ നോട് ഏത് രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം കൂട്ടിയാൽ $x^2 - 1$ ഘടകമായ ബഹുപദം ലഭിക്കും?
15. $x^2 + an + b = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം $-3, 5$ ഇവയാണെങ്കിൽ

    a) $x^2 + ax + b$ യെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക?

    b) a, b ഇവയുടെ വിലയെന്ത്?

16. n ഏതു സംഖ്യായായാലാണ് $x + 1$ എന്ന ബഹുപദം $x^n - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാവുന്നത്?

17. a) $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$ നെ $x + 2$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക? $P(x)$ ന്റെ ഘടകമാണോ $x + 2$

b) ഈ ഹരണഫലത്തെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

c) $2x^2 + 9x^2 + 13x + 6$ നെ മൂന്ന് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക?

d) $2x^3 + 9x^2 _ 13x + 6 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ ഏവ?

18. $ax^3 + bx^2 + cx + d$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x^2 - 4$ എങ്കിൽ $4a = -c, 4b = -d$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

$x2 - 4$ ഘടകമായ ഏതാനും മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങൾ എഴുതുക.

19. $q(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $x-a$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം k യും $r(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $(x-a)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം ^-k യും ആണ്.

a) $q(a)$ കാണുക.

b) $q(x) + r(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x - a$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

20. $(x - 1)(x + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$x^3 + 2x^2 - x - 2$ എന്ന സമവക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ ഏവ?

21. $p(x) = x^2 - 6x + 9$ എന്ന ബഹുപദം പരിഗണിക്കുക.

a) $p(a) = p(b)$ കണക്കാക്കുക?

$p(a) = p(b)$ ആകത്തക്കവിധത്തിൽ a, b എന്നീ രണ്ട് സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

സൂചന :

$p(a) = p(b) = 1$ എന്ന് പരിഗണിച്ചാൽ

$x^2 - 6x + 9 = 1$ ആകുന്ന x കാണാം.

$\therefore\ x^2 - 6x + 8 = 0.$

$2^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$

$\therefore p(4) = 1, p(2) = 1$

മൂല്യനിർണയ ചോദ്യങ്ങൾ

1. $2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ ന്റെ ഘടകമാണോ $x - 1$ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

2. $p(x) - 2x^2 - x -1$. $p(x)$ നെ 2 ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക? $p(x) = o$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളേവ?

3. $2x^3 - x^2 - 5x -2$ നെ $x -2$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക?

4. $p (x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 4$. $p (x)$ നോട് ഏത് സംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ $x + 2$ ഘടകമായി ബഹുപദം കിട്ടും.

   $p (x)$ ൽ നിന്ന് ഏത് സംഖ്യകുറച്ചാൽ $x + 1$ ഘടകമായ ബഹുപദം കിട്ടും?

5. $ax^3 + bx^2 + cx + d$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x^2 - 9$ എങ്കിൽ

   $9a = -c, ab = -d$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

   $x^2 - a$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 വരുന്ന ഒരു മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദം എഴുതുക?

6. $p (x) = (x - 2) (x + 3) + k$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഒരു ഘടകമാണ് $x + 2$ എങ്കിൽ

   a) k യുടെ വിലയെത്ര?

   b) $x-1; p (x)$ ഒരു ഘടകമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

   c) $p(x)$ ന്റെ കൂടെ ഏത് സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ $x -3$ ഘടകമായ ബഹുപദം കിട്ടും.

7. $p (x) = x^3 + ax^2+ bx + c$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ $P (o)$ = 3 ആണ് $p(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്. $x^2 -1$ എങ്കിൽ a, b, c ഇവയുടെ വിലകൾ കാണുക.

8. a) $x^2 - 5x + 6$ നെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

   b) $x^3 - 2x^2 - x + 10$ ന്റെ ഘടകമാണോ $x - 2, x - 3$

   c) $x^3 + 2x^2 - x + 10$ ന്റെ ഘടകമാണോ $x^2 - 5x + 6$

   e) $x^3 - 2x^2 - x + 10$ ൽ നിന്ന് ഏത് സംഖ്യകുറച്ചാൽ $x^2 - 5x + 6$ ഘടകമായ ബഹുപദം കിട്ടും?

8. $3x^3 - 2x^2$ എന്ന ബഹുപദത്തോട് ഏത് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം കൂട്ടിയാൽ $x-3, x + 3$ ഇവ ഘടകങ്ങളായ ബഹുപദം കിട്ടും?

10. $ax^3 +bx^2 + cx + d$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടമാണ്. $x^2 - 4$ എങ്കിൽ $4 (a- b) = c+ d$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

11
സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- ശരാശരി
- ആവൃത്തിയും മധ്യമവും
- വിഭാഗങ്ങളും മധ്യമവും

മുന്നറിവുകൾ

- തന്നിരിക്കുന്ന ഗണിതപരമായ വിവരങ്ങളുടെ ആകെ തുകയെ അവയുടെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിച്ച താണ് മാധ്യം.
- സംഖ്യകളെ അരോഹണ ക്രമത്തിൽ എഴുത്തുന്ന പ്രവർത്തനം.
- രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ ശരാശരി കാണുന്ന പ്രവർത്തനം.
- സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസവും n-ാം പദവും കാണുന്ന രീതി.

ആശയങ്ങൾ

തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു കൂട്ടം അളവുകളിൽ ഏറിയ പങ്കിനോടും അടുത്ത് നിൽക്കുന്ന അളവാണ് മാധ്യം. അളവുകളുടെ കൂട്ടത്തിലേക്ക് വളരെ കൂടുതലോ വളരെ കുറവോ ആയ ഒരളവ് കൂടിച്ചേരുമ്പോൾ മാധ്യം അളവുകളുടെ വലുപ്പത്തെക്കുറിച്ച് ശരിയായ ധാരണയല്ല തരുന്നത്. ഇത്തരം സന്ദർഭത്തിൽ ശരിയായ വിവരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നതിനാണ് മധ്യമം എന്ന ആശയം ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണം: ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ 10 തൊഴിലാളികളുടെ പ്രതിദിന വരുമാനം 600, 800, 700, 900, 750, 650, 850, 950, 1000, 500 രൂപ വീതമാണ്. ഇതിന്റെ മാധ്യം $\frac{7700}{10}$ = 770 രൂപ. ഈ കൂട്ടത്തിലേക്ക് 20000 രൂപ പ്രതിദിന വരുമാനമുള്ള ഒരു സമ്പന്നൻ വന്നാൽ മാധ്യവരുമാനം $\frac{770 \times 10 + 20000}{11}$. ഇത് ഏകദേശം 2518 രൂപയാണ്. ഭൂരിഭാഗം തൊഴിലാളികളുടെയും വരുമാനത്തെക്കാൾ ഏറെ കൂടുതലാണിത്. അപ്പോൾ നമുക്ക് ശരിയല്ലാത്ത ശരാശരിയാണ് ലഭിക്കുന്നത്.

ഈ വിവരങ്ങളെ ആരോഹണ ക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ ആറാമതായി (നടുക്ക്) വരുന്നത് 800 രൂപയാണ്. അതായത് മധ്യമ വരുമാനമായ 800 ഭൂരിപക്ഷം തൊഴിലാളികളുടെയും വരുമാനത്തോട് അടുത്ത് നിൽക്കുന്നു.

പ്രവർത്തനങ്ങൾ

- ഷോട്ട്പുട്ട് പരിശീലനത്തിൽ ഒരു കായികതാരം എറിഞ്ഞ ദൂരങ്ങൾ 23, 21.5, 22, 22.5, 23.2, 22.7, 22.6, 21.7, 21.8, 23.1 ഇവയുടെ മധ്യമം കാണുക.

  (ദൂരങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇരട്ട സംഖ്യയായി വരുമ്പോൾ നടുക്ക് വരുന്ന രണ്ട് ദൂരങ്ങളുടെ ശരാശരിയാണ് മധ്യമം.)
- ഗ്രാമത്തിലെ ഒരു കടയിൽ കഴിഞ്ഞ ഏഴ് ദിവസങ്ങളിലായി ലഭിച്ച വരുമാനം ചുവടെ നൽകുന്നു.

  2050, 2500, 2150, 2350, 2450, 2200, 2100, 2300

  മധ്യമ വരുമാനം കാണുക.
- 1നും 30നും ഇടയിൽ പൊതുവ്യത്യാസം 3 ആയ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണി എഴുതി അതിന്റെ മധ്യമം കാണുക.

കൂട്ടാവൃത്തി പട്ടിക

തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ നിന്ന് കൂട്ടാവൃത്തി പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.

ദിവസക്കൂലി	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
500	3
600	4
700	6
800	8
900	6
1000	4

500 രൂപ വരെ ദിവസ വരുമാനമുള്ള എത്രപേരുണ്ട്?
600 രൂപ വരെ വരുമാനമുള്ളവർ എത്ര?
700 രൂപ വരെ വരുമാനമുള്ളവർ എത്ര?
800 രൂപ വരെ വരുമാനമുള്ളവർ എത്ര?
900 രൂപ വരെയും 1000 രൂപ വരെയും വരുമാനമുള്ളവർ എത്ര പേരുണ്ട്?

ദിവസക്കൂലി	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
500 രൂപ വരെ	3
600 രൂപ വരെ	7
700 രൂപ വരെ	13
800 രൂപ വരെ	21
900 രൂപ വരെ	27
1000 രൂപ വരെ	31

ഇവിടെ ആകെ ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം 31
31 പേരിൽ നടുക്കു വരുന്ന ജോലിക്കാരൻ 16-ാമത്തെ ആളാണ്. ഇയാളുടെ വരുമാനമാണ് മധ്യമവരുമാനം. 14 മുതൽ 21 വരെ സ്ഥാനങ്ങളിലുള്ള ജോലിക്കാരുടെ. വരുമാനം 800 രൂപയാണ്. 16-ാമത്തെ തൊഴിലാളിയും ഈ കൂട്ടത്തിൽ ആയതിനാൽ മധ്യമ വരുമാനം 800 രൂപയായി കണക്കാക്കാം.

വിഭാഗാടിസ്ഥാനത്തിൽ നൽകിയ ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ നിന്ന് മധ്യമം കണ്ടെത്തുന്ന പ്രവർത്തനം.

ഭാരം (കി.ഗ്രാം)	ആളുകളുടെ എണ്ണം
25-30	5
30-35	8
35-40	11
40-45	12
45-50	6
50-55	3
ആകെ	45

ആദ്യം കൂട്ടാവൃത്തി പട്ടിക തയ്യാറാക്കാം.

ഭാരം (കി.ഗ്രാം)	ആളുകളുടെ എണ്ണം
30 വരെ	5
35 വരെ	13
40 വരെ	24
45 വരെ	36
50 വരെ	42
55 വരെ	45

- ആകെയുള്ള 45 പേരിൽ എത്രമത്തെ ആളാണ് നടുക്ക് വരുന്നത്?
  $\frac{45 + 1}{2} =$ 23-ാമത്തെ.
- 23-ാമത്തെയാൾ ഏതൊക്കെ സ്ഥാനത്തുള്ള ആളുകൾക്കൊപ്പമാണ്?
  14 മുതൽ 24 വരെയുള്ള ആളുകൾക്കൊപ്പം.
- 23-ാമത്തെ ആൾ ഏത് വിഭാഗത്തിലാണ് ഉൾപ്പെടുന്നത്?
  35 - 40 വിഭാഗത്തിൽ.
- 14-ാമത്തെ ആൾ മുതൽ 24-ാമത്തെ ആൾ വരെ ആകെ എത്ര പേരുണ്ട്?
  11 പേർ.
- 35-40 വിഭാഗത്തിലെ 5 കി.ഗ്രാം ഭാരത്തെ 11 തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കിയാൽ ഇതിൽ ഒരു ഭാഗം എത്രയാണ്?
  $\frac{5}{11}$
- അപ്പോൾ 14-ാമത്തെ ആളുടെ ഭാരം ഏതൊക്കെ ഭാരങ്ങൾക്കിടയിലാണ്?
  35നും $35\frac{5}{11}$ നും
  14-ാമത്തെ ആളുടെ ഭാരം ഈ വിഭാഗത്തിന്റെ കൃത്യം നടുവിലാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കാം.
- $\frac{5}{11}$ന്റെ പകുതി എത്രയാണ്? $\frac{5}{22}$

- അപ്പോൾ 35നും $35\frac{5}{11}$നും നടുക്ക് വരുന്ന സംഖ്യ ഏത്?

  $35\frac{5}{22}$

- എങ്കിൽ അടുത്ത ആളുടെ ഭാരമോ?

  $35\frac{5}{11}$ നും $35\frac{10}{11}$ നും നടുക്ക്.

  അതായത് $35\frac{10}{22}$ നും $35\frac{20}{22}$ നും നടുക്ക്.

  ഇത് $35\frac{15}{22}$ ആകുന്നു.

  ഇവിടെ 14ാമത്തെ ആളുടെ ഭാരം $35\frac{5}{22}$

  തുടർന്നുള്ള ഓരോ ആളുടെയും ഭാരം വീതം $\frac{5}{11}$ കൂടുന്നു.
  (അതായത് $\frac{10}{22}$ വീതം)

  14-ാമത്തെ ആൾ മുതൽ 24-ാമത്തെ ആൾ വരെയുള്ള 11 പേരുടെ ഭാരം ശ്രേണിയായി എഴുതിയാൽ.
  $35\frac{5}{22}$ $35\frac{15}{22}$ $35\frac{25}{22}$ ....
  ഇത് ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയാണെന്ന് കാണാം.
  ഈ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം = $35\frac{5}{22}$
  പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{5}{11}$, പദങ്ങളുടെ എണ്ണം 11
  അപ്പോൾ 23-ാം പദം, $35\frac{5}{22} + (11-1) \times \frac{5}{11} = 35\frac{5}{22} + 10 \times \frac{5}{11}$

  $$= 35\frac{5}{22} + \frac{50}{11} = 35\frac{5}{22} + \frac{100}{22} = 35 + \frac{105}{22} = 35 + 4 + \frac{7}{22}$$

  $$= 39\frac{17}{22} = 39.77 \text{ കി.ഗ്രാം}$$

- വിഭാഗ വിസ്താരത്തെ മധ്യമ ആവൃത്തി ഉൾപ്പെടുന്ന സ്ഥാനവിസ്താരം ഉപയോഗിച്ച് ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നതിനുള്ള വർക്ഷീറ്റ്.

മധ്യമം ഉൾപ്പെടുന്ന വിഭാഗം (ക്ലാസ്)	വിഭാഗ വിസ്താരം	മധ്യമ ആവൃത്തി ഉൾപ്പെടുന്ന സ്ഥാന വിസ്താരം	ആകെ ആവൃത്തി	തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കിയതിൽ ഒരു ഭാഗം
25-30	5	3-23 (4 മുതൽ 23 വരെ)	20	$\frac{5}{20}$
110-115	5	15-22 (16 മുതൽ 22 വരെ)	7	$\frac{5}{7}$
35-45	10	18-36 (19 മുതൽ 36 വരെ)	18	$\frac{10}{18}$
140-155	15	7-47 (8 മുതൽ 47 വരെ)	40	$\frac{15}{40}$

ആകെ ആവൃത്തി ഇരട്ട സംഖ്യ ആയാലോ?

ഒരു ഉദാഹരണം കാണൂ.

- സ്കൂൾ ഗണിത ക്ലബ്ബിലെ അംഗങ്ങളുടെ ഭാരങ്ങളാണ് കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

ഭാരം (കി.ഗ്രാം)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
30-34	4
34-38	9
38-42	15
42-46	20
46-50	12
50-54	10
ആകെ	70

സൂചന : ആദ്യം കൂട്ടാവൃത്തി പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക. മധ്യമഭാരം 35ാമത്തെയും 36ാമത്തെയും കുട്ടികളുടെ ഭാരത്തിന്റെ ശരാരയാണ്.

കൂട്ടാവൃത്തി പട്ടിക.

ഭാരം (കി.ഗ്രാം)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
34 ൽ കുറവ്	4
38 ൽ കുറവ്	9
42 ൽ കുറവ്	......
46 ൽ കുറവ്	....
50 ൽ കുറവ്	....
54 ൽ കുറവ്	....

- മധ്യമ ഭാരം ഏതൊക്കെ കുട്ടികളുടെ ശരീരഭാരത്തിന്റെ ശരാശരിയാണ്?
- ഈ കുട്ടികളുടെ ഭാരം ഏത് വിഭാഗത്തിലാണ് വരുന്നത്?
- ഈ വിഭാഗ വിസ്താരത്തെ ഇതേ വിഭാഗത്തിൽ വരുന്ന കുട്ടികളുടെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിച്ച് തുല്യ ഭാഗങ്ങളാക്കുക. തുടർന്ന് ലഭിക്കുന്ന സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദം, പൊതുവിത്യാസം എന്നിവ കണ്ടെത്തുക. 35-ാമത്തെയും 36-ാമത്തെയും കുട്ടികളുടെ ഭാരം ആ ശ്രേണിയിലെ എത്രാമത്തെ പദങ്ങളായിരിക്കും. ഈ പദങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക. അവയുടെ ശരാശരിയായിരിക്കും മധ്യമം.

തുടർ പ്രവർത്തനങ്ങൾ

- ഒരു സമിതിയിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം പ്രായമനുസരിച്ച് പട്ടികപ്പെടുത്തിയതാണ് ചുവടെ.

പ്രായം	അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം
25-30	4
30-35	7
35-40	12
40-45	15
45-50	16
50-55	12
55-60	9
60-65	5

അംഗങ്ങളുടെ മധ്യമ പ്രായം കണക്കാക്കുക.

- 50 കുടുംബങ്ങളുടെ 2 മാസത്തെ കറന്റ് ചാർജ് ചുവടെ പട്ടികയായി നൽകിയിരിക്കുന്നു. മധ്യമം കാണുക.

കറന്റ് ചാർജ്	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
100–150	2
150–200	5
200–250	9
250–300	12
300–350	16
350–400	4
400–450	2

- ഒരു പരീക്ഷയ്ക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകളെ കുറിച്ചുള്ള വിവരങ്ങളാണ് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. മാർക്കുകളുടെ മധ്യമം കാണുക.

മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
0–10	8
10–20	11
20–30	7
30–40	9
40–50	6
50–60	4
60–70	3
70–80	2

- ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ 49 പേരുടെ ദിവസ വരുമാനം പട്ടികയായി തിരിച്ച് ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മധ്യമം കാണുക.

ദിവസവരുമാനം (രൂപയിൽ)	ആളുകളുടെ എണ്ണം
300–350	4
350–400	6
400–450	10
450–500	14
500–550	8
550–600	4
600–650	3

- 80 അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു സംസ്ഥാന നിയമസഭയിൽ അംഗങ്ങളുടെ പ്രായം വ്യക്തമാക്കുന്ന പട്ടികയാണ് ചുവടെ. ഇവരുടെ മധ്യമപ്രായം കണക്കാക്കുക.

പ്രായം	നിയമസഭാഗംങ്ങളുടെ എണ്ണം
25–30	4
30–35	6
35–40	10
40–45	13
45–50	16
50–55	14
55–60	9
60–65	5
65–70	3

- **അനുബന്ധം**

ആളുകളുടെ ഭാരത്തെ സംബന്ധിച്ച മുൻ ചോദ്യത്തിൽ നിന്ന് മധ്യമം കണ്ടെത്താൻ ഒരു എളുപ്പ വഴി യാകാം. മധ്യമഭാരം വരുന്ന 35-40 എന്ന വിഭാഗത്തിൽ $x_1 = 35$, $x_2 = 40$ എന്നിങ്ങനെയും 14ാമത്തെയും 24ാമത്തെയും സ്ഥാനത്തെ യഥാക്രമം y_1, y_2 എന്നിങ്ങനെയുമെടുക്കുക.

അപ്പോൾ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം $y_2 - y_1 + 1$ ഇതിനെ n എന്നെടുക്കുക.

അതായത് 24 - 14 + 1 =11

പൊതുവിത്യാസം $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1 + 1} = \frac{40 - 35}{11} = \frac{5}{11}$

$$\frac{d}{2} = \frac{5}{2x\ 11} = \frac{5}{22}$$

14-ാം പദം $= 35 + \frac{5}{22} \quad (x_1 + \frac{d}{2})$

മധ്യമപദം (23-ാം പദം) = 14-ാം പദം $+ (n-1) \times d$

$$= 35 + \frac{5}{22} + (11 - 1) \times \frac{5}{11}$$

ബീജഗണിത സഹായത്തോടെ

മധ്യമം = $x_1 + \frac{d}{2} + \frac{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}{n}$

യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റ്

1. ഒരു പ്രാഥമികാരോഗ്യ കേന്ദ്രത്തിൽ 11 ദിവസങ്ങളിലെ ഒ.പി. രജിസ്ട്രേഷൻ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

   64, 72, 58, 81, 68, 77, 83, 54, 98, 92, 75. രോഗികളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക. 2

2. ഒരു കുടുംബത്തിലെ ഒരു വർഷത്തെ ഫോൺ ബില്ല് ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. ഇതിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

   235, 240, 455, 380, 330, 420, 390, 280, 290, 320, 440, 410 2

3. പത്താംതരം തുല്യതാ പരീക്ഷയെഴുതിയ 60 പേരുടെ വയസ്സ് തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. മധ്യമ വയസ് കാണുക. 4

വയസ്സ്	പരീക്ഷാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം
20–30	4
30–40	6
40–50	13
50–60	21
60–70	11
70–80	5

4. ഒരു ഗ്രാമീണ ഗ്രന്ഥാലയത്തിൽ നിന്നും 80 അംഗങ്ങൾക്ക് ഒരു വർഷത്തിനിടയിൽ വിതരണം ചെയ്ത പുസ്തകങ്ങളുടെ എണ്ണം വ്യക്തമാക്കുന്ന പട്ടികയാണ് ചുവടെ. വിതരണം ചെയ്ത പുസ്തകങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മധ്യമം കാണുക. 4

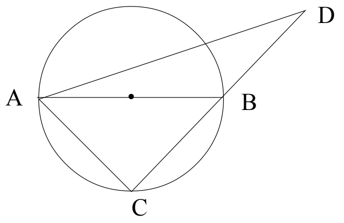
വിതരണം നടത്തിയ പുസ്തകങ്ങളുടെ എണ്ണം	അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം
10–20	17
20–30	19
30–40	12
40–50	8
50–60	11
60–70	9
70–80	4

ചോദ്യപേപ്പർ -1

സമയം : $2\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ
മാർക്ക് : 80

1. പൊതുവിത്യാസം 6 ആയ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ അഞ്ച് പദങ്ങൾ എഴുതുക. ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം കാണുക. 2

2. ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസമാണ്,
$< D = 30$ $< BAD = 20^0$ ആയാൽ $< BAC, < ABC$
എന്നിവ കാണുക. 2

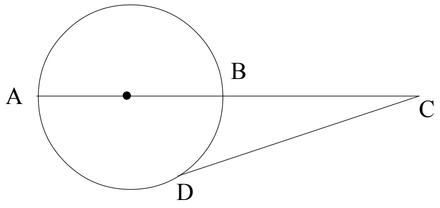


3. (1, 6), (4, 10) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ് കാണുക? 2

4. പാദ ആരം 12 സെ.മീ ഉം, ചരിവുയരം 25 സെ.മീ ആയ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ഉയരം എന്ത്? 2

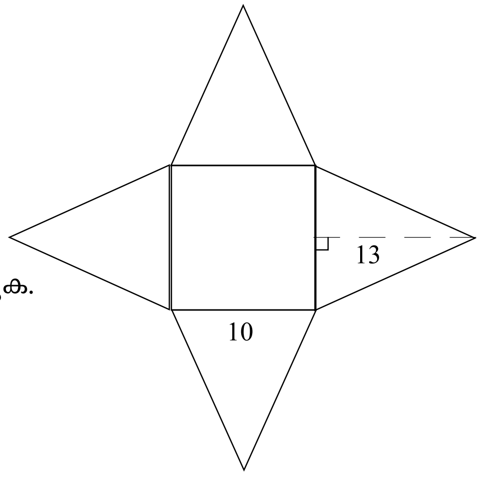
5. $2x^2 - 7x + 6 = (2x - 3)(x - 2)$ ആകുന്നു. $2x^2 - 7x + 6 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം എഴുതുക. 3

6. ആരം 2.5 സെ.മീ ആയ വൃത്തത്തിന്റെ
വ്യാസമാണ് AB. കൂടാതെ തൊടുവര CD യുടെ
നീളം 6 സെ.മീ എങ്കിൽ AC യുടെ നീളം കാണുക. 3



7. ഒരു പെട്ടിയിൽ 1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ഓരോന്നും എഴുതിയ കടലാസ് കഷ ണങ്ങൾ ഉണ്ട്. മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 4, 9 എന്നിവ ഓരോന്നും എഴുതിയ കടലാസ് കഷണങ്ങളും ഉണ്ട്. രണ്ട് പെട്ടിയിലും നിന്ന് ഓരോ കടലാസ് കഷണം എടുത്താൽ രണ്ടും വർഗസംഖ്യയാകാ നുള്ള സാധ്യത എന്ത്? 3

8. ചിത്രത്തിൽ സമചതുരവും അതിനോട്
ചേർന്ന് നാല് സമപാർശ്വ ത്രികോണങ്ങളും
കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇത് മടക്കി ഒരു സമചതുര
സ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കിയാൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക. 3



അല്ലെങ്കിൽ

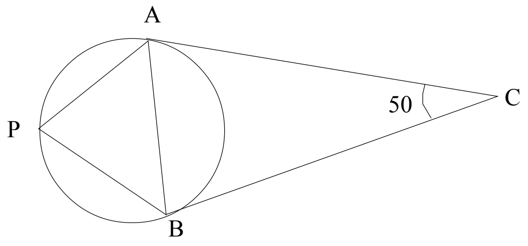
24 സെ.മീ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ നിന്നും 135^0 കേന്ദ്രകോൺ ഉള്ള ഒരു വൃത്താംശം മുറിച്ചെ ടുത്ത് ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക നിർമ്മിച്ചാൽ അതിന്റെ വക്രതലപരപ്പളവ് കാണുക.

9. ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രമായതും 5 യൂണിറ്റ് ആരമായതുമായ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് (3, 4). എങ്കിൽ വൃത്തത്തിലെ മറ്റ് ഏതെങ്കിലും 7 ബിന്ദുക്കളുടെ സംഖ്യാജോടികൾ എഴുതുക.

10. എ) ആദ്യത്തെ തുടർച്ചയായ 20 എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക എത്ര? 3

ബി) ബീജഗണിതരൂപം $3n + 2$ ആയ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ തുടർച്ചയായ 20 പദങ്ങളുടെ തുക എത്ര? 3

11. 3



CA, CB എന്നിവ തൊടുവരകൾ $< C = 50^0$, PA = PB ആയാൽ Δ PAB യിലെ കോണുകളുടെ അളവുകൾ കാണുക ?

12. $x^2 + x + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാൻ കഴിയില്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക. 3

13. (2, 1), (3, 4), (-3, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ x, y അക്ഷങ്ങൾ വരച്ച് അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ യോജിപ്പിച്ചാൽ മട്ടത്രികോണമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. 4

14. പൊതുവ്യത്യാസം 4 ആയ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ തുടർച്ചയായ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ തുക 4/15 ആയാൽ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. 4

അല്ലെങ്കിൽ

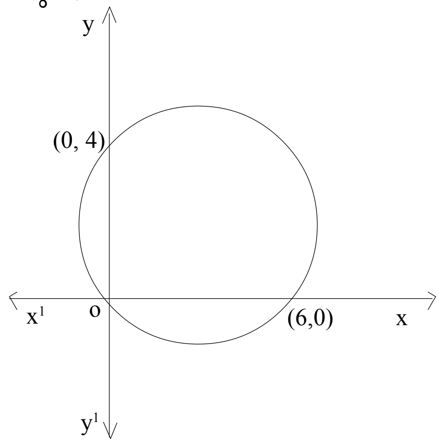
ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളിൽ ഒന്നിന് മറ്റെവശത്തേക്കാൾ 6 സെ.മീ നീളം കൂടുതലാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 36 ച.സെ.മീ ആയാൽ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം കാണുക.

15. വശങ്ങളുടെ നീളം 7 സെ.മീ, 5 സെ.മീ ആയ ചതുരം വരയ്ക്കുക. അതേ പരപ്പളവുള്ളതും നീളം 6 സെ.മീ ആയതുമായ മറ്റൊരു ചതുരം നിർമ്മിക്കുക. 4

16. 5, 7, 9.... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ തുടർച്ചയായ പദങ്ങളുടെ തുകയോട് 4 കൂട്ടിയാൽ എപ്പോഴും പൂർണവർഗമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. 4

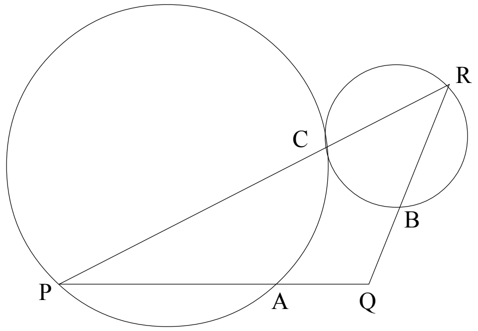
17. ഈ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം കാണുക.

വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം എന്ത്? 4



18. 4.5 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിന് വെളിയിൽ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും 9 സെ.മീ അകലെ P എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. P യിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേക്ക് രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കുക. നീളം അളന്നെഴുതുക. 4

19. 4



ചിത്രത്തിൽ രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ C ൽ തൊടുന്നു. C യിലൂടെ വരച്ച വരയാണ് PR.PQ, RQ എന്നിവ വൃത്തത്തെ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ മുറിക്കുന്നു. AQBC എന്ന ചതുർഭുജം ചക്രീയം എന്ന് തെളിയിക്കുക.

20. രണ്ട് കുഴലുകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു സംഭരണയിൽ വെള്ളം നിറയ്ക്കാൻ 18 മിനിട്ട് മതി. വലിയ കുഴൽ മാത്രം തുറന്ന് വച്ചാൽ നിറയാനെടുക്കുന്ന സമയം, ചെറിയ കുഴൽ മാത്രം തുറന്ന് വെച്ചാൽ നിറായനെടുക്കുന്ന സമയത്തെക്കാൾ 15 മിനുട്ട് കുറവാണ്. എങ്കിൽ ചെറിയ കുഴൽ മാത്രം തുറന്ന് വെച്ചാൽ സംഭരണി നിറയാനെടുക്കുന്ന സമയമെത്ര? 5

21. ഒരു പ്രദേശത്തെ വീടുകളുടെ വൈദ്യുതി ഉപയോഗമനുസരിച്ച് തരംതിരിച്ച പട്ടിക ഇങ്ങനെയാണ്.

വൈദ്യുതി ഉപയോഗം (യൂണിറ്റ്)	വീടുകളുടെ എണ്ണം
100–110	3
110–120	6
120–130	5
130–140	8
140– 150	9
150–160	4

വൈദ്യുതി ഉപയോഗത്തിന്റെ മധ്യമം കാണുക. 5

22. 50 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും ഒരു ടവറിന്റെ മുകളറ്റവും ചുവടും 40^0, 50^0 കീഴ് കോണുകളിൽ കാണുന്നു. ടവറിന്റെ ഉയരം കാണുക? 5

(tan 50 = 1.19, tan 40 - 0.83)

അല്ലെങ്കിൽ

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം 10 സെ.മീ. അതിലെ രണ്ട് കോണുകൾ 50^0, 60^0 ആകുന്നു. എങ്കിൽ മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളം കാണുക.

(sin 50 = 0.77, sin 60 = 0.87, sin 70 = 0.94)

23. 12 സെ.മീ പാദ ആരവും 15 സെ.മീ ചരിവുയരവുമുള്ള ഒരു കട്ടിയായ വൃത്തസ്തൂപിക ഉരുക്കി 3 സെ.മീ ആരമുള്ള കട്ടിയായ ചെറുഗോളങ്ങളുണ്ടാക്കി മാറ്റിയാൽ എത്ര ഗോളങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം. 5

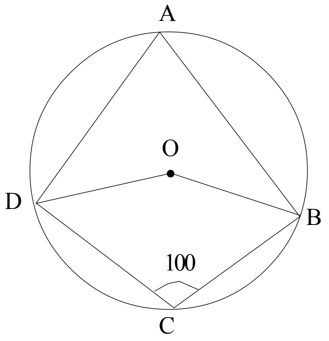
****

ചോദ്യപേപ്പർ-2

സമയം : $2\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ
മാർക്ക് : 80

1. ആദ്യപദം 7ഉം പൊതുവ്യത്യാസം 4 ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഒരു പദമാണോ 103? 2

2. ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രവും $< BCD = 100^0$ യും ആണ്. $< BOD$, $< A$ എന്നിവ കാണുക. 2



3. x, y അക്ഷങ്ങൾ വരച്ച് P (5, 3), Q (-4, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. 2

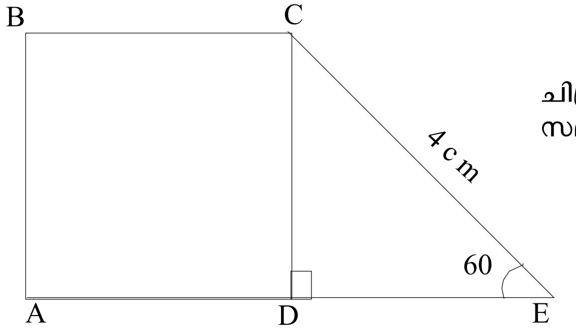
4. ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക $\frac{13}{6}$ എന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യം എഴുതുക. 2

5. ഒരു പഴക്കച്ചവടക്കാരൻ ഒരാഴ്ചയിലെ 7 ദിവസം വിറ്റ പഴത്തിന്റെ തൂക്കം (കിലോഗ്രാമിൽ) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

62.5, 50, 70.5, 64, 58.5, 67.5, 47

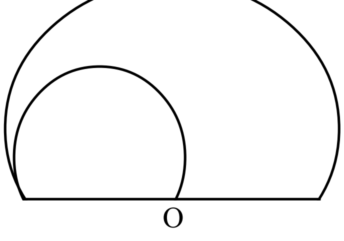
തൂക്കത്തിന്റെ മാധ്യവും മധ്യമവും കണക്കാക്കുക. 2

6. വക്കുകളെല്ലാം 12 സെ.മീ ഉള്ള ഒരു സമചതുരക്കട്ടയിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്? 3

7. 

ചിത്രത്തിൽ $< E = 60^0$, CE= 4 സെ.മി ആയാൽ സമചതുരം ABCD യുടെ പരപ്പളവ് എത്ര? 3

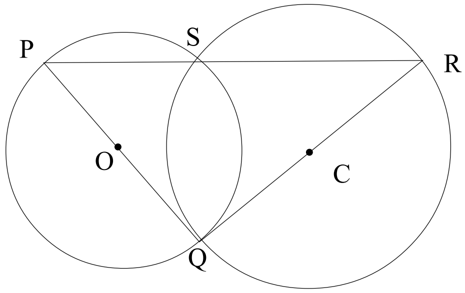
8. ചിത്രത്തിൽ രണ്ട് അർദ്ധവൃത്തങ്ങളുണ്ട്. ഇതിൽ വലുതിന്റെ കേന്ദ്രമാണ് O . കണ്ണടച്ച് വലിയ അർദ്ധവൃത്തത്തിനുള്ളിൽ ഒരു കുത്തിട്ടാൽ അത് ചെറിയ അർദ്ധവൃത്തത്തിനകത്ത് ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്ത്? 3



9. (6, 2), (−3, 1), (−2, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് കിട്ടുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്ര? ത്രികോണം മട്ടത്രികോണമാണോ? എന്തുകൊണ്ട്? 3

10. 20 സെ.മീ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ നിന്ന് 72^0 കേന്ദ്രകോണുള്ള ഒരു വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുത്ത് അതിനെ മടക്കി ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നു. അതിന്റെ ഉയരം എത്ര? വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തമെത്ര? 3

11.

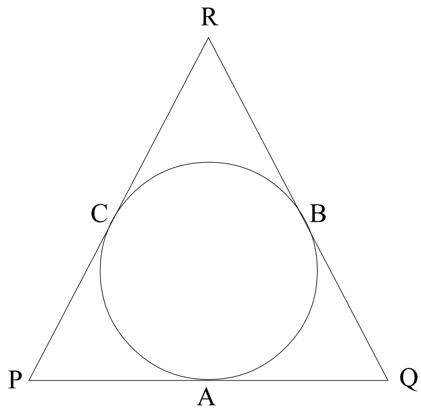


ചിത്രത്തിൽ O, C ഇവ കേന്ദ്രങ്ങളായ വൃത്തങ്ങൾ Q, S എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. PQ, QR എന്നിവ വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസങ്ങൾ ആയാൽ P, S, R എന്നിവ ഒരേ രേഖയിലെ ബിന്ദുക്കളാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക. < PQR എത്ര? 4

12. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 5-ാം പദം 32ഉം 10-ാം പദം 67ഉം ആണ്. സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 17-ാം പദം എത്ര? ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക. 4

13. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളിൽ വലിയത് മറ്റേവശത്തിനേക്കാൾ 7 സെ.മീ നീളം കൂടുതലാണ്. കർണത്തിന്റെ നീളം ചെറിയ വശത്തിന്റെ 2 മടങ്ങിൽ നിന്ന് 1 സെമീ കുറവുമാണ്. എങ്കിൽ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കാണുക. 4

14. 4



ചിത്രത്തിൽ Δ PQR ന്റെ അന്തർവൃത്തം ABC എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുന്നു. AQ = 10 സെ.മീ, QR = 12 സെ.മീ, PR= 16 സെ.മീ ആയാൽ PA യുടെ നീളമെത്ര?

15. വശങ്ങൾ 6 സെ.മീ, 4 സെ.മീ ആയ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കുക. ചതുരത്തിന് തുല്യപരപ്പളവുള്ള ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക? 4

16. x^2 - x-12 എന്ന ബഹുപദത്തെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക?

17. ഒരു ക്ലാസിലെ 50 കുട്ടികളെ ഉയരം അനുസരിച്ച് തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. 4

ഉയരം (സെ.മീ)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
140–145	5
145–150	7
150–155	8
155–160	12
160–165	10
165–170	5
170–175	3

ഉയരങ്ങളുടെ മധ്യമം കാണുക.

18. 2.5 സെ.മീ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ട് തൊടുവരകൾ തമ്മിലുള്ള കോൺ 50^0 അകത്തക്കവിധം തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കുക.

19. (3,4) കേന്ദ്രമായ 5 സെ.മീ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം എഴുതുക. ഈ വൃത്തം x അക്ഷത്തെയും y അക്ഷത്തെയും ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക. 4

20. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ 6 സെ.മീ, 5 സെ.മീ എന്നിവയാണ്. അവയുടെ ഇടയിലുള്ള കോൺ 130^0 ആയാൽ ത്രികോണത്തന്റെ പരപ്പളവെത്ര? ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക. 4

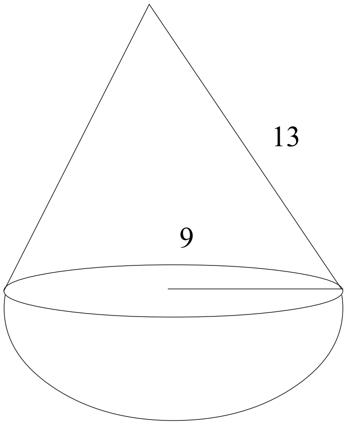
21. ഒരേ ആരമുള്ള ഒരു അർദ്ധഗോളവും ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയും ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ചേർത്ത് വെച്ച് ഒരു ഘനരൂപമുണ്ടാക്കുന്നു. പൊതുആരം 9 സെ.മീ. വൃത്തസ്തൂപിക ഭാഗത്തിന്റെ ചരിവുയരം 13 സെ.മീ എന്നിവയാണ്.

എങ്കിൽ

എ) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം എത്ര?

ബി) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക?

സി) ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക. 5



22. ഒരു ടവറിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിൽക്കുന്ന 1.5 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കുട്ടി 60 മീറ്റർ അകലെ നിൽക്കുന്ന ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളറ്റം 60^0 മേൽകോണിൽ കാണുന്നു. ടവറിന്റെ മുകളിൽ കയറി നോക്കിയപ്പോൾ 50^0 മേൽകോണിലാണ് കണ്ടത്. ഏകദേശ ചിത്രം വരച്ച് ടവറിന്റെയും കെട്ടിടത്തിന്റെയും ഉയരം കാണുക. 5

$$\left[\begin{array}{l}\text{Sin } 50^0 = 0.77, \text{ Cos } 50 = 0.64, \text{ Tan } 50 = 1.19 \\ \text{Sin } 60^0 = 0.87, \text{ Cos } 60 = 0.5, \text{ Tan } 60 = 1.73\end{array}\right]$$

23. രണ്ടു ആളുകൾ ഒരുമിച്ച് ചെയ്താൽ ഒരു ജോലി 4 ദിവസം കൊണ്ട് തീരും. അതിൽ ഒരാൾ ഒറ്റയ്ക്ക് ചെയ്താൽ മറ്റേ ആളെക്കാൾ 6 ദിവസം കൂടുതൽ വേണം ആ ജോലി തീർക്കാൻ. എങ്കിൽ ഓരോരുത്തരും ഒറ്റയ്ക്ക് ചെയ്താൽ അവരെടുക്കുന്ന ദിവസമെത്ര? 5

ചോദ്യപേപ്പർ-3

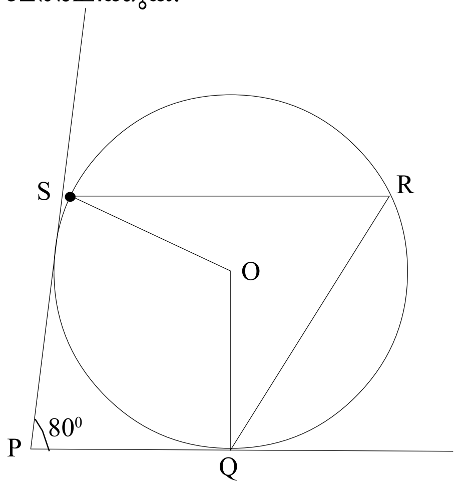
സമയം : $2\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ
മാർക്ക് : 80

1. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിത രൂപം 3n-1

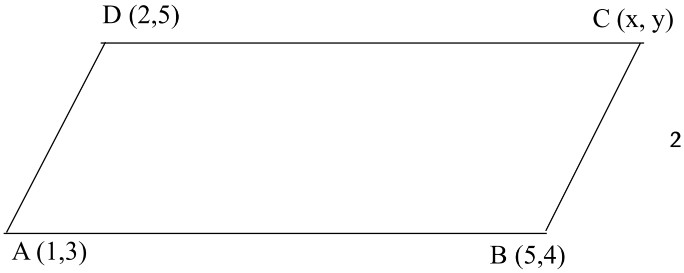
   a) ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെ 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എത്ര?

   b) 104 ഈ ശ്രേണിയിലെ പദമാണെന്ന് സമർത്ഥിക്കുക. 2

2. ചിത്രത്തിൽ PQ, PS ഇവ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാണ്. O വൃത്തകേന്ദ്രവും $\angle SPQ = 80^0$ $\angle SOQ$, $\angle SRQ$ ആയാൽ ഇവ കാണുക. 2



3. ABCD ഒരു സാമാന്തരികം ആണ്. C യുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക. 2



4. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

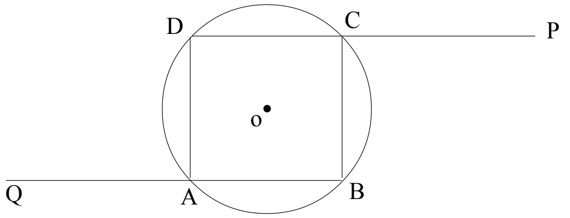
   P (2) കാണുക.

   P (x) ന്റെ ഘടകമാണോ x-2 എന്ന് പരിശോധിക്കുക. 2

5. ഒരു ക്ലാസിലെ 8 കുട്ടികൾക്ക് ഗണിതത്തിന് കിട്ടിയ മാർക്ക് ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മാർക്കുകളുടെ മാധ്യവും മധ്യമവും കാണുക. 2

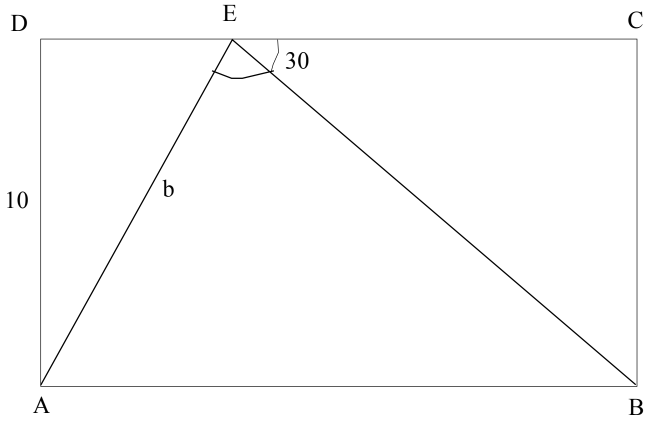
   62, 70, 54, 46, 38, 41, 39, 50

6. ചിത്രത്തിൽ ABCD ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജം ആണ്. $\angle QAD + \angle PCB$ എത്ര? 3



7. കർണം 13 സെ.മീ ഉള്ള ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം 7 ആണ്. വശങ്ങളുടെ നീളം കാണുക. 3

8.



എ) ചതുരം ABCD യുടെ നീളം കാണുക.

ബി) Δ AEB യുടെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ കാണുക. 3

9. ഒരു സമചതുര സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം 25 സെ.മീ, ഉപരിതല പരപ്പളവ് 896 cm^2 . സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക. 3

10. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $3n^2 + 5n$ ആണ്. ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

അല്ലെങ്കിൽ

$5^2 \times 5^4 \times 5^6 \times ... 5^{2n} = (0.008)^{-30}$

അയാൽ n ന്റെ വില കാണുക.

11. 1 മുതൽ 20 വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ഒരേ വലുപ്പത്തിലുള്ള കാർഡുകളിൽ എഴുതി 2 പെട്ടികളിൽ ഇട്ടിരിക്കുന്നു. പെട്ടികളിലേക്ക് നോക്കാതെ രണ്ട് പെട്ടികളിൽ നിന്നും ഓരോ കാർഡെടുത്താൽ 4

a) രണ്ടും ഒരേ സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?

b) രണ്ടും അഭാജ്യസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?

c) ഒരണ്ണമെങ്കിലും അഭാജ്യ സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതഎത്ര?

d) പരമാവധി ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ വരാനുള്ള സാധ്യത എത്ര?

12. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ $2x - y = 0$, $2x - 3y = 0$, $y-4 = 0$ ആയാൽ മൂന്ന് ശീർഷങ്ങളുടെയും സൂചക സംഖ്യകൾ കാണുക.

അല്ലെങ്കിൽ

A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ (3, 2), (8,7) എന്ന വരയിൽ

a) AP : PB = 2: 3 ആകുന്ന P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കാണുക?

b) AQ : QB = 3:2 ആകുന്ന Q എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ കാണുക?

13. a) ആദ്യപദം 6 വരുന്ന ഒരു സമാന്തരശ്രേണി എഴുതുക?

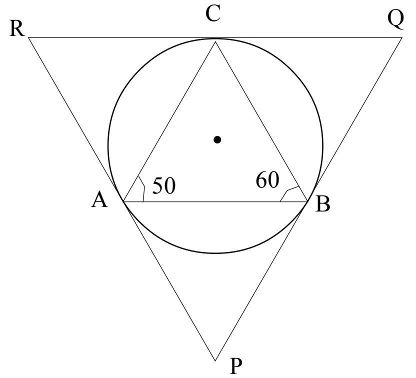
b) ആദ്യപദം 6ഉം പൊതുവ്യത്യാസം നേരത്തെ എഴുതിയതിനേക്കാൾ 3 കൂടുതലുമായ മറ്റൊരു സമാന്തരശ്രേണി എഴുതുക?

c) രണ്ട് ശ്രേണികളുടെയും 30-ാം പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എന്ത്?

d) ശ്രേണികളിലെ ആദ്യത്തെ 30 പദങ്ങളുടെ തുകകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമെന്ത്?

14. പരിവൃത്ത ആരം 3 സെ.മീ ഉം രണ്ട് കോണുകൾ 60^0, 70^0 എന്നിവയും ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ അളന്നെഴുതുക. 4

15. ചിത്രത്തിൽ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം വൃത്തത്തിലാണ്. വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം ഈ ബിന്ദുവിൽ വൃത്തത്തെ തൊടുന്നു. വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു കോണുകളും കണ്ടുപിടിക്കുക.



16. (4, 9), (−4, −3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക. ഈ വര അക്ഷങ്ങളെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചക സംഖ്യകളും എഴുതുക? 4

17. വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെ.മീ, 5 സെ.മീ, 6 സെ.മീ ആയ ത്രികോണം വരച്ച് അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക. അന്തർവൃത്ത ആരം അളന്നെഴുതുക. 4

18. $6x^2 - yx + 2$ നെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

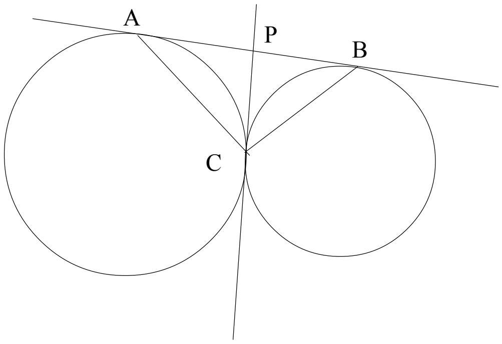
അല്ലെങ്കിൽ

$x^3 - ax^2 + 11x - b$ യുടെ ഘടകങ്ങളാണ് x-1, x-2 എങ്കിൽ a, b ഇവയുടെ വില കാണുക.

19. ചുവടെ കൊടുത്ത പട്ടികയിലെ 40 തൊഴിലാളികളുടെ ദിവസവേതനത്തിന്റെ മധ്യമം കാണുക. 4

വരുമാനം (രൂപ)	എണ്ണം
200−300	5
300−400	10
400−500	15
500−600	8
600−700	2

20. ഈ രണ്ട് തൊടുവരകളും വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന ത്രികോണമാണ് ABC. ഇത് മട്ടത്രികോണമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. 4



21. പണിതുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകൾഭാഗം 1.5 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കുട്ടി 35^0 മേൽകോണിൽ കണ്ടു. 12 മീറ്റർ കൂടി ഉയർത്തി, കെട്ടിടം പണി തീർന്നപ്പോൾ അയാൾ അതേ സ്ഥാനത്ത് നിന്ന് 65^0 മേൽകോണിലാണ് മുകൾഭാഗം കണ്ടത്. കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?
(Sin 35 = 0.57, Cos 35 = 0.81, tan 35 = .70, Sin = 0.90, Cos 65 = 0.42, tan 65 = 2.14) 5

22. ആധാരബിന്ദുകേന്ദ്രവും ആരം 5 ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റ സമവാക്യം കാണുക.

(5, 0), (0,5) (0, –5), (–5, 0) (5, 5), (–5, 5)

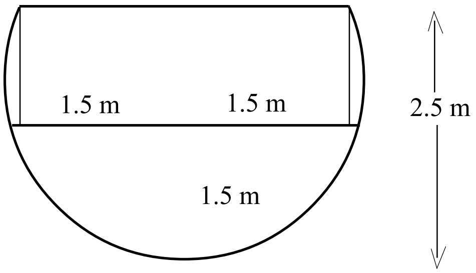
എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ വൃത്തത്തിൽ തന്നയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. 5

23. 216^0 കേന്ദ്രകോണും 25 സെ.മീ ആരവുമുള്ള ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക ആക്കിയാൽ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ

എ) ആരം

ബി) ഉയരം

സി) വ്യാപ്തം ഇവ കാണുക. 5

അല്ലെങ്കിൽ

വൃത്ത സ്തംഭത്തിന്റെ ഒരറ്റത്ത് അർധഗോളം ഘടിപ്പിച്ച ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു ജലസംഭരണിയുടെ ആകെ ഉയരം 2.5 മീറ്ററും പാദആരം 1.5 മീറ്ററും ആണ്. ഇതിൽ എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും.