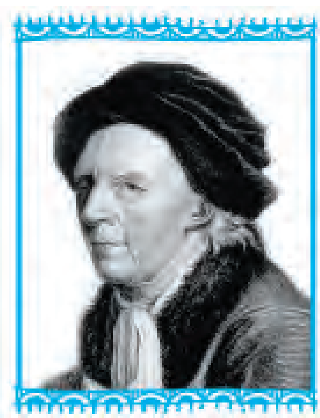
अध्याय **11**

त्रि-विमीय ज्यामिति
(Three Dimensional Geometry)

❖ *The moving power of mathematical invention is not reasoning but imagination. – A.DEMORGAN* ❖

11.1 भूमिका (Introduction)

कक्षा XI में, वैश्लेषिक ज्यामिति का अध्ययन करते समय द्वि-विमीय और त्रि-विमीय विषयों के परिचय में हमने स्वयं को केवल कार्तीय विधि तक सीमित रखा है। इस पुस्तक के पिछले अध्याय में हमने सदिशों की मूल संकल्पनाओं का अध्ययन किया है। अब हम सदिशों के बीजगणित का त्रि-विमीय ज्यामिति में उपयोग करेंगे। त्रि-विमीय ज्यामिति में इस उपागम का उद्देश्य है कि यह इसके अध्ययन को अत्यंत सरल एवं सुरुचिपूर्ण (सुग्राहय) बना देता है।*



Leonhard Euler
(1707-1783)

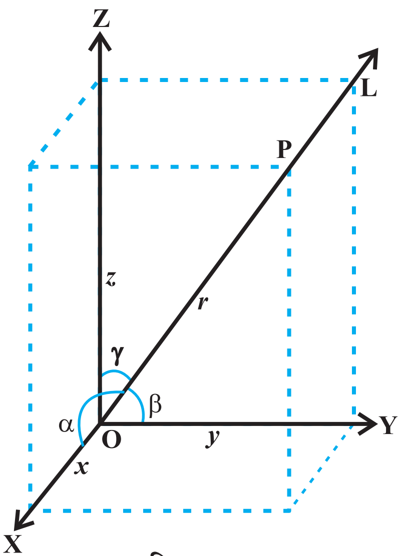
इस अध्याय में हम दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा के दिक्-कोज्या व दिक्-अनुपात का अध्ययन करेंगे और विभिन्न स्थितियों में अंतरिक्ष में रेखाओं और तलों के समीकरणों, दो रेखाओं, दो तलों व एक रेखा और एक तल के बीच का कोण, दो विषमतलीय रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी व एक तल की एक बिंदु से दूरी के विषय में भी विचार विमर्श करेंगे। उपरोक्त परिणामों में से अधिकांश परिणामों को सदिशों के रूप में प्राप्त करते हैं। तथापि हम इनका कार्तीय रूप में भी अनुवाद करेंगे जो कालांतर में स्थिति का स्पष्ट ज्यामितीय और विश्लेषणात्मक चित्रण प्रस्तुत कर सकेगा।

11.2 रेखा के दिक्-कोसाइन और दिक्-अनुपात (Direction Cosines and Direction Ratios of a Line)

अध्याय 10 में, स्मरण कीजिए, कि मूल बिंदु से गुजरने वाली सदिश रेखा L द्वारा x, y और z-अक्षों के साथ क्रमश α, β और γ बनाए गए कोण दिक्-कोण कहलाते हैं तब इन कोणों की कोसाइन नामत: $\cos\alpha$, $\cos\beta$ और $\cos\gamma$ रेखा L के दिक्-कोसाइन (direction cosines or dc's)कहलाती हैं।

* For various activities in three dimensional geometry, one may refer to the Book ***"A Hand Book for designing Mathematics Laboratory in Schools",*** NCERT, 2005

यदि हम L की दिशा विपरीत कर देते हैं तो दिक्–कोण, अपने संपूरकों में अर्थात् π-α, π-β और π-γ से बदल जाते हैं। इस प्रकार, दिक्–कोसाइन के चिह्न बदल जाते हैं।



आकृति 11.1

ध्यान दीजिए, अंतरिक्ष में दी गई रेखा को दो विपरीत दिशाओं में बढ़ा सकते हैं और इसलिए इसके दिक्–कोसाइन के दो समूह हैं। इसलिए अंतरिक्ष में ज्ञात रेखा के लिए दिक्–कोसाइन के अद्वितीय समूह के लिए, हमें ज्ञात रेखा को एक सदिश रेखा लेना चाहिए। इन अद्वितीय दिक्–कोसाइन को l, m और n के द्वारा निर्दिष्ट किए जाते हैं।

टिप्पणी अंतरिक्ष में दी गई रेखा यदि मूल बिंदु से नहीं गुजरती है तो इसकी दिक्–कोसाइन को ज्ञात करने के लिए, हम मूल बिंदु से दी गई रेखा के समांतर एक रेखा खींचते हैं। अब मूल बिंदु से इनमें से एक सदिश रेखा के दिक्–अनुपात ज्ञात करते हैं क्योंकि दो समांतर रेखाओं के दिक्–अनुपातों के समूह समान (वही) होते हैं।

एक रेखा के दिक्–कोसाइन के समानुपाती संख्याओं को रेखा के दिक्–अनुपात (direction ratios or *dr's*) कहते हैं। यदि एक रेखा के दिक्–कोसाइन l, m, n व दिक्–अनुपात a, b, c हों तब किसी शून्येतर $\lambda \in \mathbf{R}$ के लिए $a = \lambda l$, $b=\lambda m$ और $c = \lambda n$

टिप्पणी कुछ लेखक दिक्–अनुपातों को दिक्–संख्याएँ भी कहते हैं।

मान लीजिए एक रेखा के दिक्–अनुपात a, b, c और रेखा की दिक्–कोसाइन l, m, n है। तब

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = k \text{ (मान लीजिए), } k \text{ एक अचर है।}$$

इसलिए $$l = ak,\ m = bk,\ n = ck \quad \dots (1)$$

परंतु $$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

इसलिए $$k^2 (a^2 + b^2 + c^2) = 1$$

या $$k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

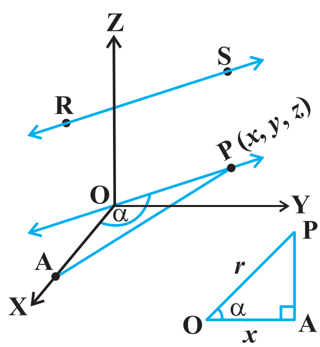
अतः (1) से, रेखा की दिक्-कोसाइन ($d.c.$'s)

$$l = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ m = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ n = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

किसी रेखा के लिए यदि रेखा के दिक्-अनुपात क्रमशः a, b, c है, तो $ka, kb, kc;\ k \neq 0$ भी दिक्-अनुपातों का एक समूह है। इसलिए एक रेखा के दिक्-अनुपातों के दो समूह भी समानुपाती होंगे। अतः किसी एक रेखा के दिक्-अनुपातों के असंख्य समूह होते हैं।

11.2.1 *रेखा की दिक्-कोसाइन में संबंध (Relation between the direction cosines of a line)*

मान लीजिए कि एक रेखा RS की दिक्-कोसाइन l, m, n है। मूल बिंदु से दी गई रेखा के समांतर एक रेखा खींचिए और इस पर एक बिंदु $P(x, y, z)$ लीजिए। P से x-अक्ष पर लंब PA खींचिए (आकृति 11.2)।



आकृति 11.2

यदि $OP = r$. तो $\cos\alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{r}$. जिससे $x = lr$ प्राप्त होता है।

इसी प्रकार $$y = mr \text{ और } z = nr.$$

इसलिए $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (l^2 + m^2 + n^2)$$

परंतु $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

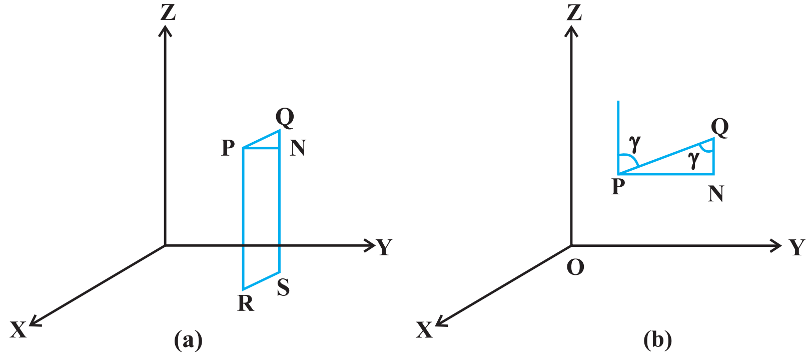
अतः $$\mathbf{l^2 + m^2 + n^2 = 1}$$

11.2.2 *दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन (Direction cosines of a line passing through two points)*

क्योंकि दो दिए बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा अद्वितीय होती है। इसलिए दो दिए गए बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ से गुजरने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन को निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं (आकृति 11.3 (a))।

मान लीजिए कि रेखा PQ की दिक्-कोसाइन l, m, n हैं और यह x, y और z-अक्ष के साथ कोण क्रमशः α, β, γ बनाती हैं।

मान लीजिए P और Q से लंब खींचिए जो XY-तल को R तथा S पर मिलते हैं। P से एक अन्य लंब खींचिए जो QS को N पर मिलता है। अब समकोण त्रिभुज PNQ में, $\angle PQN = \gamma$ (आकृति 11.3 (b)) इसलिए



आकृति 11.3

$$\cos\gamma = \frac{NQ}{PQ} = \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

इसी प्रकार $\cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{PQ}$ और $\cos\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{PQ}$

अतः बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड PQ कि दिक्-कोसाइन

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ} \text{ हैं।}$$

जहाँ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

टिप्पणी बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड के दिक्-अनुपात निम्न प्रकार से लिए जा सकते हैं।

$$x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, \text{ या } x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$$

उदाहरण 1 यदि एक रेखा x, y तथा z-अक्षों की धनात्मक दिशा के साथ क्रमशः 90°, 60° तथा 30° का कोण बनाती है तो दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n है। तब $l = \cos 90° = 0$, $m = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$, $n = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

उदाहरण 2 यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात 2, −1, −2 हैं तो इसकी दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल दिक्-कोसाइन निम्नवत् हैं

$$\frac{2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}, \frac{-2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}$$

अर्थात् $$\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}$$

उदाहरण 3 दो बिंदुओं (– 2, 4, – 5) और (1, 2, 3) को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन

$$\frac{x_2-x_1}{PQ}, \frac{y_2-y_1}{PQ}, \frac{z_2-z_1}{PQ}$$

हैं, जहाँ $$PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

यहाँ P और Q क्रमश: (– 2, 4, – 5) और (1, 2, 3) हैं।

इसलिए $$PQ = \sqrt{(1-(-2))^2+(2-4)^2+(3-(-5))^2} = \sqrt{77}$$

इसलिए दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन हैं:

$$\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$$

उदाहरण 4 x, y और z-अक्षों की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल x-अक्ष क्रमश: x, y और z-अक्ष के साथ 0°, 90° और 90° के कोण बनाता है। इसलिए x-अक्ष की दिक्-कोसाइन cos 0°, cos 90°, cos 90° अर्थात् 1,0,0 हैं।
इसी प्रकार y-अक्ष और z-अक्ष की दिक्-कोसाइन क्रमश: 0, 1, 0 और 0, 0, 1 हैं।

उदाहरण 5 दर्शाइए कि बिंदु A (2, 3, – 4), B (1, – 2, 3) और C (3, 8, – 11) संरेख हैं।

हल A और B को मिलाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात
1 –2, –2 –3, 3 + 4 अर्थात् – 1, – 5, 7 हैं।

B और C को मिलाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात 3 –1, 8 + 2, – 11 – 3, अर्थात्, 2, 10, – 14 हैं।

स्पष्ट है कि AB और BC के दिक्-अनुपात समानुपाती हैं। अत: AB और BC समांतर हैं। परंतु AB और BC दोनों में B उभयनिष्ठ है। अत: A, B, और C संरेख बिंदु हैं।

प्रश्नावली 11.1

1. यदि एक रेखा x, y और z-अक्ष के साथ क्रमशः $90°, 135°, 45°$ के कोण बनाती है तो इसकी दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।
2. एक रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक्षों के साथ समान कोण बनाती है।
3. यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात $-18, 12, -4$, हैं तो इसकी दिक्-कोसाइन क्या हैं?
4. दर्शाइए कि बिंदु $(2, 3, 4), (-1, -2, 1), (5, 8, 7)$ संरेख हैं।
5. एक त्रिभुज की भुजाओं की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज के शीर्ष बिंदु $(3, 5, -4), (-1, 1, 2)$ और $(-5, -5, -2)$ हैं।

11.3 अंतरिक्ष में रेखा का समीकरण (Equation of a Line in Space)

कक्षा XI में द्वि-विमीय तल में रेखाओं का अध्ययन करने के पश्चात् अब हम अंतरिक्ष में एक रेखा के सदिश तथा कार्तीय समीकरणों को ज्ञात करेंगे।

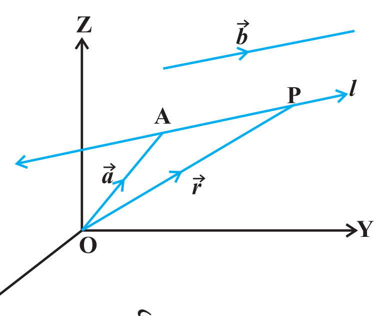
एक रेखा अद्वितीयतः निर्धारित होती है, यदि

(i) यह दिए बिंदु से दी गई दिशा से होकर जाती है, या

(ii) यह दो दिए गए बिंदुओं से होकर जाती है।

11.3.1 *दिए गए बिंदु A से जाने वाली तथा दिए गए सदिश $\vec{b}$ के समांतर रेखा का समीकरण (Equation of a line through a given point A and parallel to a given vector $\vec{b}$)*

समकोणिक निर्देशांक्ष निकाय के मूल बिंदु O के सापेक्ष मान लीजिए कि बिंदु A का सदिश $\vec{a}$ है। मान लीजिए कि बिंदु A से जाने वाली तथा दिए गए सदिश $\vec{b}$ के समांतर रेखा l है। मान लीजिए कि l पर स्थित किसी स्वेच्छ बिंदु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है (आकृति 11.4)।



आकृति 11.4

तब $\overrightarrow{AP}$ सदिश $\vec{b}$ के समांतर है अर्थात् $\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{b}$, जहाँ λ एक वास्तविक संख्या है।

परंतु $$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$$

अर्थात् $$\lambda \vec{b} = \vec{r} - \vec{a}$$

विलोमतः प्राचल λ के प्रत्येक मान के लिए यह समीकरण रेखा के किसी बिंदु P की स्थिति प्रदान करता है। अतः रेखा का सदिश समीकरण है:

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b} \qquad \dots (1)$$

टिप्पणी यदि $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ है तो रेखा के दिक्-अनुपात a, b, c है और विलोमत: यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात a, b, c हों तो $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ रेखा के समांतर होगा। यहाँ b को $|\vec{b}|$ न समझा जाए।

सदिश रूप से कार्तीय रूप व्युत्पन्न करना (Derivation of Cartesian Form from Vector Form)

मान लीजिए कि दिए बिंदु A के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1) हैं और रेखा की दिक्-कोसाइन a, b, c हैं मान लीजिए किसी बिंदु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं। तब

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\,;\ \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

और
$$\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करके $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$, के गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$x = x_1 + \lambda a;\ y = y_1 + \lambda b;\ z = z_1 + \lambda c \quad \ldots (2)$$

ये रेखा के प्राचल समीकरण हैं। (2) से प्राचल λ का विलोपन करने पर, हम पाते हैं:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad \ldots (3)$$

यह रेखा का कार्तीय समीकरण है।

टिप्पणी यदि रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n हैं, तो रेखा का समीकरण

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$ हैं।

उदाहरण 6 बिंदु $(5, 2, -4)$ से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ के समांतर रेखा का सदिश तथा कार्तीय समीकरणों को ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है, कि

$$\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \text{ और } \vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

इसलिए, रेखा का सदिश समीकरण है:

$$\vec{r} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}) \quad [(1) \text{ से}]$$

चूँकि रेखा पर स्थित किसी बिंदु $P(x, y, z)$ की स्थिति सदिश $\vec{r}$ है, इसलिए

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$

$$= (5 + 3\lambda)\hat{i} + (2 + 2\lambda)\hat{j} + (-4 - 8\lambda)\hat{k}$$

λ का विलोपन करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-8}$$

जो रेखा के समीकरण का कार्तीय रूप है।

11.3.2 *दो दिए गए बिंदुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण (Equation of a line passing through two given points)*

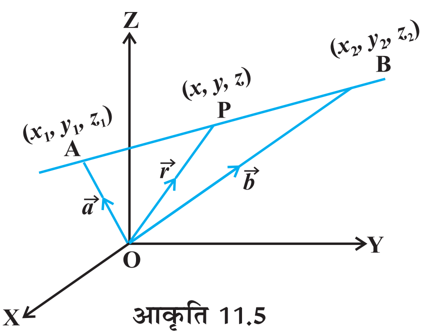
मान लीजिए एक रेखा पर स्थित दो बिंदुओं $A(x_1, y_1, z_1)$ और $B(x_2, y_2, z_2)$, के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं (आकृति 11.5)।

मान लीजिए $\vec{r}$ एक स्वेच्छ बिंदु P का स्थिति सदिश है। तब P रेखा पर है यदि और केवल यदि $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$ तथा $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ संरेख सदिश हैं। इसलिए P रेखा पर स्थित है यदि और केवल यदि

$$\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

या $$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}),\ \lambda \in \mathbf{R} \quad \ldots (1)$$

जो रेखा का सदिश समीकरण है।



आकृति 11.5

सदिश रूप से कार्तीय रूप व्युत्पन्न करना

हम पाते हैं कि

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k},\ \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}, \text{ और } \vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} + \lambda[(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}]$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ के गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1);\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1);\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$$

λ का विलोपन करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

जो रेखा के समीकरण का कार्तीय रूप है।

उदाहरण 7 बिंदुओं $(-1, 0, 2)$ और $(3, 4, 6)$ से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ बिंदुओं $A(-1, 0, 2)$ और $B(3, 4, 6)$ के स्थिति सदिश हैं।

तब $\vec{a} = -\hat{i} + 2\hat{k}$

और $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

इसलिए $\vec{b} - \vec{a} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$

मान लीजिए कि रेखा पर स्थित किसी स्वेच्छ बिंदु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है। अतः रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = -\hat{i} + 2\hat{k} + \lambda(4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$$

उदाहरण 8 एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$ है। इस रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए समीकरण का मानक रूप

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

से तुलना करने पर हम पाते हैं कि $x_1 = -3, y_1 = 5, z_1 = -6; a = 2, b = 4, c = 2$

इस प्रकार अभीष्ट रेखा बिंदु (– 3, 5, – 6) से होकर जाती है तथा सदिश $2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ के समांतर है। मान लीजिए कि रेखा पर स्थित किसी बिंदु की स्थिति सदिश $\vec{r}$ है तो रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = (-3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}) + \lambda\ (2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$$

द्वारा प्रदत्त है।

11.4 दो रेखाओं के मध्य कोण (Angle between two lines)

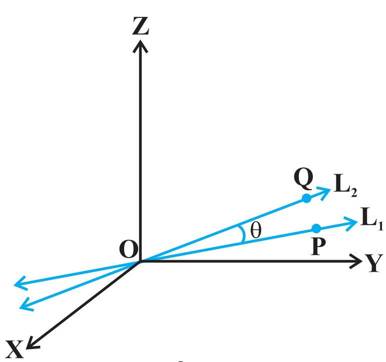
मान लीजिए कि L_1 और L_2 मूल बिंदु से गुजरने वाली दो रेखाएँ हैं जिनके दिक्-अनुपात क्रमशः a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2, है। पुनः मान लीजिएकि L_1 पर एक बिंदु P तथा L_2 पर एक बिंदु Q है। आकृति 11.6 में दिए गए सदिश OP और OQ पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि OP और OQ के बीच न्यून कोण θ है। अब स्मरण कीजिए कि सदिशों OP और OQ के घटक क्रमशः a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 हैं। इसलिए उनके बीच का कोण θ

$$\cos\theta = \left| \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right|$$ द्वारा प्रदत्त है।

पुनः sin θ के रूप में, रेखाओं के बीच का कोण

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$ से प्रदत्त है

$$= \sqrt{1 - \frac{(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2}{\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right)}}$$



आकृति 11.6

$$= \frac{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)-\left(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right)^2}}{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)}\sqrt{\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2}}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \qquad \ldots (2)$$

टिप्पणी उस स्थिति में जब रेखाएँ L_1 और L_2 मूल बिंदु से नहीं गुजरती है तो हम L_1 और L_2 के समांतर, मूल बिंदु से गुजरने वाली रेखाएँ क्रमशः L'_1 व L'_2 लेते हैं। यदि रेखाओं L_1 और L_2 के दिक्-अनुपातों के बजाय दिक्-कोसाइन दी गई हो जैसे L_1 के लिए l_1, m_1, n_1 और L_2 के लिए l_2, m_2, n_2 तो (1) और (2) निम्नलिखित प्रारूप लेंगे।

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1m_2 + n_1n_2| \text{ (क्योंकि } l_1^2+m_1^2+n_1^2=1=l_2^2+m_2^2+n_2^2) \qquad \ldots (3)$$

और $$\sin\theta = \sqrt{(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 - (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2} \qquad \ldots (4)$$

दिक्-अनुपात a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 वाली रेखाएँ

(i) लंबवत् है, यदि $\theta = 90°$, अर्थात् (1) से $\boldsymbol{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0}$

(ii) समांतर है, यदि $\theta = 0$, अर्थात् (2) से $\boldsymbol{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$

अब हम दो रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करेंगे जिनके समीकरण दिए गए हैं। यदि उन रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ के बीच न्यून कोण θ है

तब $$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$$

कार्तीय रूप में यदि रेखाओं: $$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \qquad \ldots (1)$$

और $$\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2} \qquad \ldots (2)$$

के बीच का कोण θ है जहाँ रेखाएँ (1) व (2) के दिक्-अनुपात क्रमशः a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 है तब

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$$

उदाहरण 9 दिए गए रेखा-युग्म

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

और $$\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए

हल मान लीजिए $\vec{b}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b}_2 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

दोनों रेखाओं के मध्य कोण θ है, इसलिए

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\,\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

अतः $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$$

उदाहरण 10 रेखा-युग्मः

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$$

और $$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल पहली रेखा के दिक्-अनुपात 3, 5, 4 और दूसरी रेखा के दिक्-अनुपात 1, 1, 2 हैं। यदि उनके बीच का कोण θ हो तब

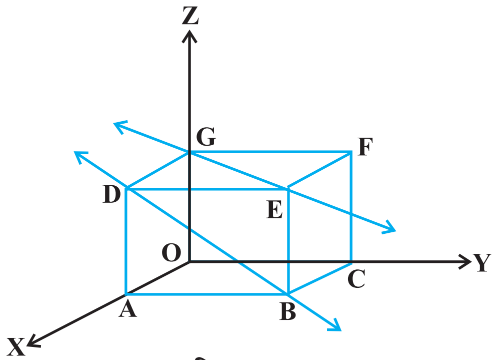
$$\cos\theta = \left|\frac{3.1 + 5.1 + 4.2}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2}\,\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}\right| = \frac{16}{\sqrt{50}\,\sqrt{6}} = \frac{16}{5\sqrt{2}\,\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

अतः अभीष्ट कोण $\cos^{-1}\left(\dfrac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ है।

11.5 दो रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी (Shortest Distance between two lines)

अंतरिक्ष में यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती है तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी शून्य है। और अंतरिक्ष में यदि दो रेखाएँ समांतर है तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी, उनके बीच लंबवत् दूरी होगी अर्थात् एक रेखा के एक बिंदु से दूसरी रेखा पर खींचा गया लंब।

इसके अतिरिक्त अंतरिक्ष में, ऐसी भी रेखाएँ होती है जो न तो प्रतिच्छेदी और न ही समांतर होती है। वास्तव में ऐसी रेखाओं के युग्म असमतलीय होते हैं और इन्हें विषमतलीय रेखाएँ (skew lines) कहते हैं। उदाहरणतया हम आकृति 11.7 में x, y और z-अक्ष के अनुदिश क्रमशः 1, 3, 2 इकाई के आकार वाले कमरे पर विचार करते हैं।



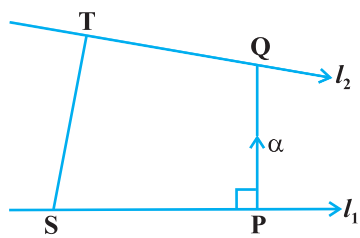
आकृति 11.7

रेखा GE छत के विकर्ण के अनुदिश है और रेखा DB, A के ठीक ऊपर छत के कोने से गुजरती हुई दीवार के विकर्ण के अनुदिश है। ये रेखाएँ विषमतलीय हैं क्योंकि वे समांतर नहीं है और कभी मिलती भी नहीं हैं।

दो रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी से हमारा अभिप्राय एक ऐसे रेखाखंड से है जो एक रेखा पर स्थित एक बिंदु को दूसरी रेखा पर स्थित अन्य बिंदु को मिलाने से प्राप्त हों ताकि इसकी लंबाई न्यूनतम हो। न्यूनतम दूरी रेखाखंड दोनों विषमतलीय रेखाओं पर लंब होगा।

11.5.1 *दो विषमतलीय रेखाओं के बीच की दूरी (Distance between two skew lines)*

अब हम रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी निम्नलिखित विधि से ज्ञात करते हैं। मान लीजिए l_1 और l_2 दो विषमतलीय रेखाएँ है जिनके समीकरण (आकृति 11.8) निम्नलिखित हैं:



आकृति 11.8

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\, \vec{b}_1 \qquad \ldots (1)$$

और $$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\, \vec{b}_2 \qquad \ldots (2)$$

रेखा l_1 पर कोई बिंदु S जिसकी स्थिति सदिश $\vec{a}_1$ और l_2 पर कोई बिंदु T जिसकी स्थिति सदिश $\vec{a}_2$ है, लीजिए। तब न्यूनतम दूरी सदिश का परिमाण, ST का न्यूनतम दूरी की दिशा में प्रक्षेप की माप के समान होगा (अनुच्छेद 10.6.2)।

यदि l_1 और l_2 के बीच की न्यूनतम दूरी सदिश $\overrightarrow{PQ}$ है तो यह दोनों $\vec{b}_1$ और $\vec{b}_2$ पर लंब होगी। $\overrightarrow{PQ}$ की दिशा में इकाई सदिश $\hat{n}$ इस प्रकार होगी कि

$$\hat{n} = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \qquad \ldots (3)$$

तब $$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = d\ \hat{n}$$

जहाँ d, न्यूनतम दूरी सदिश का परिमाण है। मान लीजिए $\overrightarrow{\mathrm{ST}}$ और $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ के बीच का कोण θ है, तब

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{ST}\ |\cos\theta|$$

परंतु $$\cos\theta = \left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ST}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{ST}}|}\right|$$

$$= \left|\frac{d\ \hat{n}\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{d\ \mathrm{ST}}\right| \quad (\text{क्योंकि } \overrightarrow{\mathrm{ST}} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1)$$

$$= \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{\mathrm{ST}\ |\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \quad ((3)\text{ के द्वारा})$$

इसलिए अभीष्ट न्यूनतम दूरी

$$d = \mathrm{PQ} = \mathrm{ST}\ |\cos\theta|$$

या $$d = \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \text{ है।}$$

कार्तीय रूप (Cartesian Form)

रेखाओं:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

और $$l_2 : \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

के बीच की न्यूनतम दूरी है:

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$

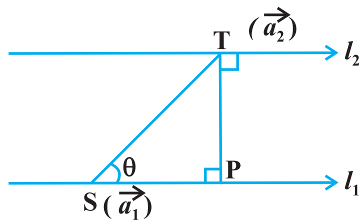
11.5.2 समांतर रेखाओं के बीच की दूरी *(Distance between parallel lines)*

यदि दो रेखाएँ l_1 यदि l_2 समांतर हैं तो वे समतलीय होती हैं। माना दी गई रेखाएँ क्रमशः

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b} \quad \ldots (1)$$

और $$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b} \quad \ldots (2)$$

हैं, जहाँ l_1 पर बिंदु S का स्थिति सदिश $\vec{a}_1$ और l_2 पर बिंदु T का स्थिति सदिश $\vec{a}_2$ है (आकृति 11.9)



आकृति 11.9

क्योंकि l_1, और l_2 समतलीय है। यदि बिंदु T से l_1 पर डाले गए लंब का पाद P है तब रेखाओं l_1 और l_2 के बीच की दूरी $= |\text{TP}|$

मान लीजिए कि सदिशों $\overrightarrow{\text{ST}}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है। तब,

$$\vec{b} \times \overrightarrow{\text{ST}} = (|\vec{b}||\overrightarrow{\text{ST}}|\sin\theta)\hat{n} \quad \ldots (3)$$

जहाँ रेखाओं l_1 और l_2 के तल पर लंब इकाई सदिश $\hat{n}$ है।

परंतु $$\overrightarrow{\text{ST}} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

इसलिए (3) से हम पाते हैं कि

$$\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = |\vec{b}|\,\text{PT}\,\hat{n} \qquad (\text{क्योंकि PT = ST} \sin\theta)$$

अर्थात् $$|\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)| = |\vec{b}|\,\text{PT}\cdot 1 \qquad (\text{as } |\hat{n}| = 1)$$

इसलिए ज्ञात रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी

$$d = |\overrightarrow{\text{PT}}| = \left|\frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right| \text{ है।}$$

उदाहरण 11 रेखाओं l_1 और l_2 के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण है :

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\,(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \quad \ldots (1)$$

और $$\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu\,(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}) \quad \ldots (2)$$

हल समीकरण (1) व (2) की $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$, से तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + \hat{j},\ \vec{b}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ और } \vec{b}_2 = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

इसलिए $$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - \hat{k}$$

और $$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$$

इस प्रकार $$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{9 + 1 + 49} = \sqrt{59}$$

इसलिए दी गई रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी

$$d = \left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right| = \frac{|3 - 0 + 7|}{\sqrt{59}} = \frac{10}{\sqrt{59}}$$

उदाहरण 12 निम्नलिखित दी गई रेखाओं l_1 और l_2:

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

और $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल दोनों रेखाएँ समातंर हैं। (क्यों?) हमें प्राप्त है कि

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k},\ \vec{a}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} \text{ और } \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

इसलिए रेखाओं के बीच की दूरी

$$d = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \right|$$

$$= \frac{|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}|}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{7} \text{ है।}$$

प्रश्नावली 11.2

1. दर्शाइए कि दिक्-कोसाइन $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13};\ \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13};\ \frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ वाली तीन रेखाएँ परस्पर लंबवत् हैं।
2. दर्शाइए कि बिंदुओं (1, – 1, 2), (3, 4, – 2) से होकर जाने वाली रेखा बिंदुओं (0, 3, 2) और (3, 5, 6) से जाने वाली रेखा पर लंब है।

3. दर्शाइए कि बिंदुओं $(4, 7, 8), (2, 3, 4)$ से होकर जाने वाली रेखा, बिंदुओं $(-1, -2, 1), (1, 2, 5)$ से जाने वाली रेखा के समांतर है।

4. बिंदु $(1, 2, 3)$ से गुज़रने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ के समांतर है।

5. बिंदु जिसकी स्थिति सदिश $2\hat{i} - j + 4\hat{k}$ से गुज़रने व सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश और कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

6. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु $(-2, 4, -5)$ से जाती है और $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ के समांतर है।

7. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. मूल बिंदु और $(5, -2, 3)$ से जाने वाली रेखा का सदिश तथा कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. बिंदुओं $(3, -2, -5)$, और $(3, -2, 6)$ से गुज़रने वाली रेखा का सदिश तथा कार्तीय रूपों में समीकरण को ज्ञात कीजिए।

10. निम्नलिखित रेखा-युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए:

(i) $\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ और

$\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

(ii) $\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$ और

$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$

11. निम्नलिखित रेखा-युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ और $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$

(ii) $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$

12. p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लंब हों।

13. दिखाइए कि रेखाएँ $\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ परस्पर लंब हैं।

14. रेखाओं $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ और $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}+\mu(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए:

15. रेखाओं $\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

16. रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित है, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए:

$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ और $\vec{r}=4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$

17. रेखाएँ, जिनकी सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम ज्ञात कीजिए:

$\vec{r}=(1-t)\hat{i}+(t-2)\hat{j}+(3-2t)\hat{k}$ और $\vec{r}=(s+1)\hat{i}+(2s-1)\hat{j}-(2s+1)\hat{k}$

11.6 समतल (Plane)

एक समतल को अद्वितीय रूप से ज्ञात किया जा सकता है यदि निम्नलिखित में से कोई एक शर्त ज्ञात हो:

(i) समतल का अभिलंब और मूल बिंदु से समतल की दूरी ज्ञात है, अर्थात् अभिलंब रूप में समतल का समीकरण

(ii) यह एक बिंदु से गुज़रता है और दी गई दिशा के लंबवत् है।

(iii) यह दिए गए तीन असरेख बिंदुओं से गुज़रता है।

अब हम समतलों के सदिश और कार्तीय समीकरणों को प्राप्त करेंगे।

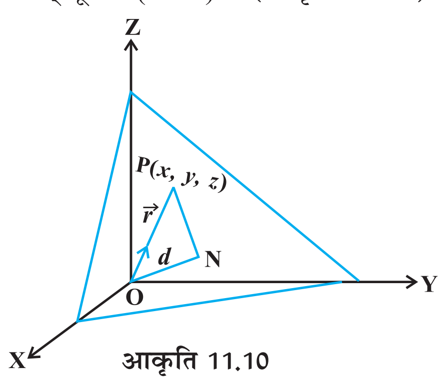
11.6.1 *अभिलंब रूप में समतल का समीकरण (Equation of a Plane in normal form)*

एक समतल पर विचार कीजिए जिसकी मूल बिंदु से लंबवत् दूरी $d\,(d\neq 0)$ है (आकृति 11.10)।

यदि $\overrightarrow{ON}$ मूल बिंदु से तल पर लंब है तथा $\overrightarrow{ON}$ के अनुदिश $\hat{n}$ मात्रक अभिलंब सदिश है तब $\overrightarrow{ON}=d\,\hat{n}$ है। मान लीजिए कि समतल पर कोई बिंदु P है। इसलिए, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{ON}$ पर लंब है।

अत: $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{ON}=0$ ... (1)

मान लीजिए P की स्थिति सदिश $\vec{r}$ है तो $\overrightarrow{NP}=\vec{r}-d\,\hat{n}$ (क्योंकि $\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{OP}$)



आकृति 11.10

इस प्रकार (1) का रूप निम्नलिखित है:

$$(\vec{r} - d\,\hat{n})\cdot d\,\hat{n} = 0$$

या $$(\vec{r} - d\,\hat{n})\cdot \hat{n} = 0 \; (d \neq 0)$$

या $$\vec{r}\cdot\hat{n} - d\,\hat{n}\cdot\hat{n} = 0$$

अर्थात् $$\vec{r}\cdot\hat{n} = d \text{ (क्योंकि } \hat{n}\cdot\hat{n} = 1) \qquad \text{... (2)}$$

यह समतल का सदिश समीकरण है।

कार्तीय रूप (Cartesian Form)

समतल का सदिश समीकरण है जहाँ $\hat{n}$ समतल के अभिलंब इकाई सदिश है। मान लीजिए समतल पर कोई बिंदु P(x, y, z) है। तब

$$\overrightarrow{\text{OP}} = \vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

मान लीजिए $\hat{n}$ की दिक्-कोसाइन l, m, n हैं। तब

$$\hat{n} = l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}$$

$\vec{r}\cdot\hat{n}$ के मानों को (2) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं,

$$(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k})\cdot(l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}) = d$$

अर्थात् $$\boldsymbol{lx + my + nz = d} \qquad \text{... (3)}$$

यह समतल का कार्तीय समीकरण है।

टिप्पणी समीकरण (3) प्रदर्शित करता है कि यदि $\vec{r}\cdot(a\,\hat{i} + b\,\hat{j} + c\,\hat{k}) = d$ एक समतल का सदिश समीकरण है तो $ax + by + cz = d$ समतल का कार्तीय समीकरण है जहाँ a, b और c समतल के अभिलंब के दिक्-अनुपात हैं।

उदाहरण 13 उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिंदु से $\frac{6}{\sqrt{29}}$ की दूरी पर है और मूल बिंदु से इसका अभिलंब सदिश $2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$ है।

हल मान लीजिए $\vec{n} = 2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$ है। तब

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = \frac{2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}}{\sqrt{29}}$$

इसलिए समतल का अभीष्ट समीकरण

$$\vec{r}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\,\hat{i}+\frac{-3}{\sqrt{29}}\,\hat{j}+\frac{4}{\sqrt{29}}\,\hat{k}\right)=\frac{6}{\sqrt{29}} \text{ है।}$$

उदाहरण 14 समतल $\vec{r}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})+1=0$ पर मूल बिंदु से डाले गए लंब इकाई सदिश की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल समतल के ज्ञात समीकरण को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\vec{r}\cdot(-6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})=1 \qquad \ldots (1)$$

अब $$|-6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}|=\sqrt{36+9+4}=7$$

इसलिए (1) के दोनों पक्षों को 7 से भाग करने पर हम पाते हैं कि

$$\vec{r}\cdot\left(-\frac{6}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}+\frac{2}{7}\hat{k}\right)=\frac{1}{7}$$

जो कि समतल का समीकरण $\vec{r}\,.\,\hat{n}=d$ के रूप का है।

इससे स्पष्ट है कि $\hat{n}=-\frac{6}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}+\frac{2}{7}\hat{k}$ समतल के लंब इकाई सदिश है जो मूल बिंदु से गुजरता है। इस प्रकार $\hat{n}$ की दिक्-कोसाइन $\frac{-6}{7},\frac{3}{7},\frac{2}{7}$ हैं।

उदाहरण 15 समतल $2x-3y+4z-6=0$ की मूल बिंदु से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि तल के अभिलंब के दिक्-अनुपात 2, –3, 4 हैं इसलिए इसकी दिक्-कोसाइन हैं:

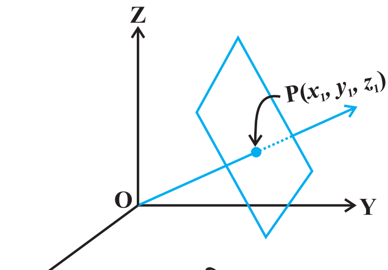
$$\frac{2}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}},\frac{-3}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}},\frac{4}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}\text{, अर्थात् }\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{-3}{\sqrt{29}},\frac{4}{\sqrt{29}}$$

इसलिए समीकरण $2x-3y+4z-6=0$ अर्थात् $2x-3y+4z=6$ को $\sqrt{29}$ से भाग करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x+\frac{-3}{\sqrt{29}}y+\frac{4}{\sqrt{29}}z=\frac{6}{\sqrt{29}}$$

और यह $lx+my+nz=d$, के रूप में है जहाँ मूल बिंदु से समतल की दूरी d है। इसलिए समतल की मूल बिंदु से दूरी $\frac{6}{\sqrt{29}}$ है।

उदाहरण 16 मूल बिंदु से समतल $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ पर डाले गए लंब के पाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.11

हल मान लीजिए मूल बिंदु से समतल पद डाले गए लंब के पाद P के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1) है (आकृति 11.11)।

तब रेखा OP के दिक्-अनुपात x_1, y_1, z_1 हैं।

समतल की समीकरण को अभिलंब के रूप में लिखने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x - \frac{3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

जहाँ OP के दिक्-अनुपात $\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$ हैं।

क्योंकि एक रेखा के दिक्-कोसाइन और दिक्-अनुपात समानुपाती होते हैं। अत:

$$\frac{x_1}{\frac{2}{\sqrt{29}}} = \frac{y_1}{\frac{-3}{\sqrt{29}}} = \frac{z_1}{\frac{4}{\sqrt{29}}} = k$$

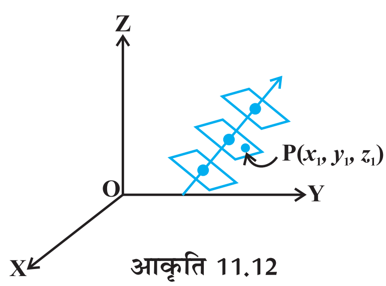
अर्थात् $$x_1 = \frac{2k}{\sqrt{29}}, y_1 = \frac{-3k}{\sqrt{29}}, z_1 = \frac{4k}{\sqrt{29}}$$

इन मानों को समतल के समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि $k = \frac{6}{\sqrt{29}}$

अत: लंब के पाद के निर्देशांक $\left(\frac{12}{29}, \frac{-18}{29}, \frac{24}{29}\right)$ है।

टिप्पणी यदि मूल बिंदु से समतल की दूरी d हो और समतल के अभिलंब की दिक्-कोसाइन l, m, n हों तब लंब का पाद (ld, md, nd) होता है।

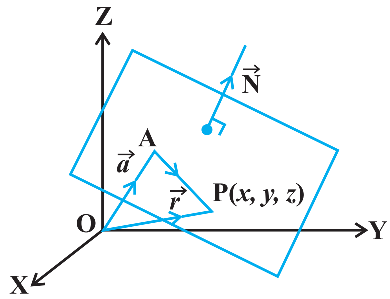
11.6.2 *एक दिए सदिश के अनुलंब तथा दिए बिंदु से होकर जाने वाले समतल का समीकरण (Equation of a plane perpendicular to a given vector and passing through a given point)*



आकृति 11.12

अंतरिक्ष में, एक दिए गए सदिश के अनुलंब अनेक समतल हो सकते हैं परंतु एक दिए गए बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ से इस प्रकार का केवल एक समतल का अस्तित्व होता है (देखिए आकृति 11.12)।

मान लीजिए कि समतल एक बिंदु A, जिसकी स्थिति सदिश $\vec{a}$ है, से जाता है और सदिश $\vec{N}$ के अनुलंब है। मान लीजिए कि समतल पर किसी बिंदु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है (आकृति 11.13)।



आकृति 11.13

तब बिंदु P समतल में स्थित होता है, यदि और केवल यदि $\overrightarrow{AP}$, $\vec{N}$ पर लंब है, अर्थात् $\overrightarrow{AP} . \vec{N} = 0$. परंतु $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$. इसलिए

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{N} = 0 \qquad \ldots (1)$$

यह समतल का सदिश समीकरण है।

कार्तीय रूप (Cartesian Form)

मान लीजिए कि दिया बिंदु A (x_1, y_1, z_1) और समतल पर कोई बिंदु P (x, y, z) है तथा $\vec{N}$ के दिक्-अनुपात A, B तथा C हैं, तब

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k},\ \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \text{ और } \vec{N} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$$

अब $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{N} = 0$

इसलिए $\left[(x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}\right] \cdot (A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}) = 0$

अर्थात् $\mathbf{A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0}$

उदाहरण 17 उस समतल का सदिश और कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिंदु (5, 2, – 4) से जाता है और 2, 3, – 1 दिक्-अनुपात वाली रेखा पर लंब है।

हल हम जानते हैं कि बिंदु (5, 2, – 4) का स्थिति सदिश $\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ है और समतल के लंब का अभिलंब सदिश $\vec{N} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ है।

इसलिए समतल का सदिश समीकरण $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{N} = 0$ से प्रदत्त है।

या $[\vec{r} - (5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k})] \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0 \qquad \ldots (1)$

(1) को कार्तीय रूप में रूपांतरण करने पर हम पाते हैं, कि

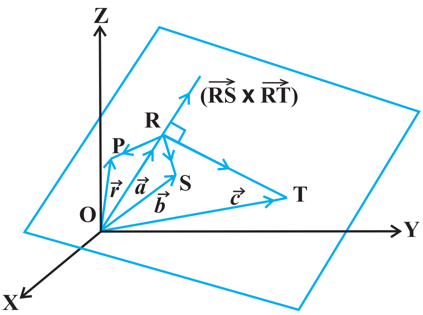
$$[(x - 5)\hat{i} + (y - 2)\hat{j} + (z + 4)\hat{k}] \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$$

या $2(x - 5) + 3(y - 2) - 1(z + 4) = 0$

अर्थात् $2x + 3y - z = 20$

जो समतल का कार्तीय समीकरण है।

11.6.3 तीन असरेखीय बिंदुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण (*Equation of a plane passing through three non-collinear points*)



आकृति 11.14

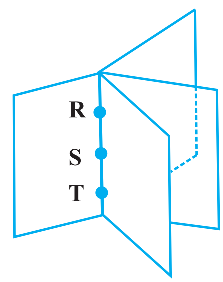
मान लीजिए समतल पर स्थित तीन असरेख बिंदुओं R, S और T के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ हैं (आकृति 11.14)।

सदिश $\overrightarrow{RS}$ और $\overrightarrow{RT}$ दिए समतल में हैं। इसलिए सदिश $\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}$ बिंदुओं R, S और T को अन्तर्विष्ट करने वाले समतल पर लंब होगा। मान लीजिए समतल में कोई बिंदु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है। इसलिए R से जाने वाले तथा सदिश $\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}$ पर लंब, समतल का समीकरण $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}) = 0$ है।

या
$$(\vec{r} - \vec{a}) \,.\, [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = 0 \qquad \ldots (1)$$

यह तीन असरेख बिंदुओं से गुजरने वाले समतल के समीकरण का सदिश प्रारूप है।

टिप्पणी उपरोक्त प्रक्रिया में तीन असरेख बिंदु कहना क्यों आवश्यक है? यदि बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हैं तब उससे गुजरने वाले कई समतल होंगे (आकृति 11.15)।



आकृति 11.15

ये समतल एक पुस्तक के पृष्ठों की भाँति होंगे जहाँ बिंदुओं R, S और T को अंतर्विष्ट करने वाली रेखा पुस्तक के पृष्ठों के बंधन वाले स्थान का सदस्य है।

कार्तीय रूप (Cartesian Form)

मान लीजिए बिंदुओं R, S और T के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) और (x_3, y_3, z_3) हैं। मान लीजिए कि समतल पर किसी बिंदु P के निर्देशांक (x, y, z) व इसका स्थिति सदिश $\vec{r}$ है। तब

$$\overrightarrow{RP} = (x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}$$
$$\overrightarrow{RS} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$
$$\overrightarrow{RT} = (x_3 - x_1)\hat{i} + (y_3 - y_1)\hat{j} + (z_3 - z_1)\hat{k}$$

इन मानों को सदिश प्रारूप के समीकरण (1) में प्रतिस्थापन करने पर हम पाते हैं कि

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

जो तीन बिंदुओं (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) और (x_3, y_3, z_3) से गुज़रने वाले समतल के समीकरण का कार्तीय प्रारूप है।

उदहारण 18 बिंदुओं R(2, 5, – 3), S(– 2, – 3, 5) और T(5, 3,– 3) से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $\vec{a}=2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}$, $\vec{b}=-2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$, $\vec{c}=5\hat{i}+3\hat{j}-3\hat{k}$

तब $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं:

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{RT}) = 0 \quad \text{(क्यों?)}$$

या $$(\vec{r}-\vec{a})\cdot[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})] = 0$$

अर्थात् $$[\vec{r}-(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k})]\cdot[(-4\hat{i}-8\hat{j}+8\hat{k})\times(3\hat{i}-2\hat{j})]=0$$

11.6.4 *समतल के समीकरण का अंत: खंड-रूप (Intercept form of the equation of a plane)*

इस अनुच्छेद में, हम समतल के समीकरण को, उसके द्वारा निर्देशांक्षों पर कटे अंत: खंड के रूप में ज्ञात करेंगे। मान लीजिए समतल का समीकरण

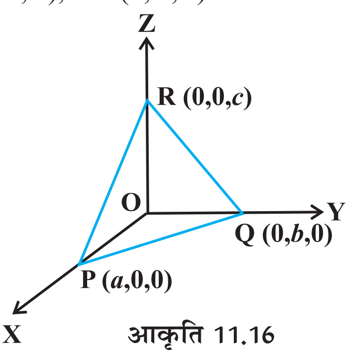
$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (D \neq 0) \text{ है।} \qquad \dots (1)$$

मान लीजिए समतल द्वारा $x, y,$ और z-अक्षों पर कटे अंत: खंड क्रमश: a, b और c (आकृति 11.16) हैं। स्पष्टत: समतल x, y और z-अक्षों से क्रमश: बिंदुओं $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, और $(0, 0, c)$ पर मिलता है।

इसलिए $$Aa + D = 0 \text{ या } A = \frac{-D}{a}$$

$$Bb + D = 0 \text{ या } B = \frac{-D}{b}$$

$$Cc + D = 0 \text{ या } C = \frac{-D}{c}$$



आकृति 11.16

इन मानों को समतल के समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने और सरल करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad \dots (2)$$

जो अंत: खंड रूप में समतल का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 19 उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x, y और z-अक्षों पर क्रमश: 2, 3 और 4 अंत: खंड काटता है।

हल मान लीजिए, समतल का समीकरण है।

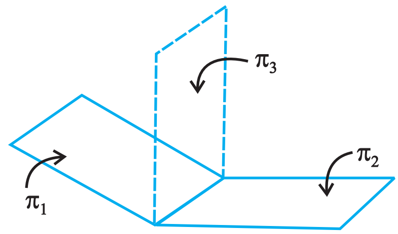
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad \dots (1)$$

यहाँ $a = 2, b = 3, c = 4$ ज्ञात हैं।

a, b और c के इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम समतल का अभीष्ट समीकरण $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ या $6x + 4y + 3z = 12$ प्राप्त करते हैं।

11.6.5 दो दिए समतलों के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाला समतल (*Plane passing through the intersection of two given planes)*

मान लीजिए π_1 और π_2 दो समतल, जिनके समीकरण क्रमशः $\vec{r}\,.\,\hat{n}_1 = d_1$ और $\vec{r}\,.\,\hat{n}_2 = d_2$ हैं इनके प्रतिच्छेदन रेखा पर स्थित किसी बिंदु का स्थिति सदिश इन दोंनों समीकरणों को संतुष्ट करेगा (आकृति 11.17)।



आकृति 11.17

यदि इस रेखा पर स्थित किसी बिंदु की स्थिति सदिश $\vec{t}$ है, तो

$$\vec{t}\cdot\vec{n}_1 = d_1 \text{ और } \vec{t}\cdot\vec{n}_2 = d_2$$

इसीलिए λ के सभी वास्तविक मानों के लिए हम पाते हैं कि

$$\vec{t}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2) = d_1+\lambda d_2$$

क्योंकि $\vec{t}$ स्वेच्छ है इसलिए यह रेखा के किसी बिंदु को संतुष्ट करता है।

इस प्रकार समीकरण $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2)=d_1+\lambda d_2$ समतल π_3 को निरूपित करता है जो ऐसा है कि यदि कोई सदिश $\vec{r}$, π_1 और π_2, के समीकरणों को संतुष्ट करता है तो वह π_3 को अवश्य संतुष्ट करेगा।

अतः समतलों $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ और $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ के प्रतिच्छेदन रेखा से जाने वाले किसी समतल का समीकरण $\boldsymbol{\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2) = d_1 + \lambda d_2}$ है। ... (1)

कार्तीय रूप (Cartesian Form)

कार्तीय रूप के लिए माना

$$\vec{n}_1 = A_1\hat{i}+B_2\hat{j}+C_1\hat{k}$$

$$\vec{n}_2 = A_2\hat{i}+B_2\hat{j}+C_2\hat{k}$$

और

$$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

तो (1) का परिवर्तित रूप है:

$$x(A_1 + \lambda A_2) + y(B_1 + \lambda B_2) + z(C_1 + \lambda C_2) = d_1 + \lambda d_2$$

या

$$\mathbf{(A_1x + B_1y + C_1z - d_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z - d_2) = 0} \quad \text{... (2)}$$

जो प्रत्येक λ के लिए दिए समतलों के प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले किसी समतल का कार्तीय समीकरण है।

उदाहरण 20 समतलों $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ और $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})=-5,$ के प्रतिच्छेदन तथा बिंदु (1,1,1) से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $\vec{n}_1=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{n}_2 = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ और $d_1=6$ और $d_2=-5$ हैं।

इसलिए सूत्र $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2)=d_1+\lambda d_2$ का प्रयोग करने पर,

$$\vec{r}\cdot[\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})] = 6-5\lambda$$

या $$\vec{r}\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1+4\lambda)]\hat{k} = 6-5\lambda \qquad \ldots (1)$$

जहाँ λ एक वास्तविक संख्या है।

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, रखने पर हम पाते हैं कि

$$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1+4\lambda)\hat{k}]=6-5\lambda$$

या $$(1+2\lambda)\,x+(1+3\lambda)\,y+(1+4\lambda)\,z=6-5\lambda$$

या $$(x+y+z-6)+\lambda\ (2x+3y+4z+5)=0 \qquad \ldots (2)$$

अब प्रश्नानुसार अभीष्ट समतल बिंदु (1,1,1) से जाता है, अत: यह बिंदु, (2) को संतुष्ट करेगा अर्थात्

$$(1+1+1-6)+\lambda\,(2+3+4+5)=0$$

या $$\lambda = \frac{3}{14}$$

λ के इस मान को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं, कि

$$\vec{r}\cdot\left[\left(1+\frac{3}{7}\right)\hat{i}+\left(1+\frac{9}{14}\right)\hat{j}+\left(1+\frac{6}{7}\right)\hat{k}\right] = 6-\frac{15}{14}$$

या $$\vec{r}\cdot\left(\frac{10}{7}\hat{i}+\frac{23}{14}\hat{j}+\frac{13}{7}\hat{k}\right) = \frac{69}{14}$$

या $$\vec{r}\cdot(20\hat{i}+23\hat{j}+26\hat{k}) = 69$$

जो समतल का अभीष्ट सदिश समीकरण है।

11.7 दो रेखाओं का सह-तलीय होना (Coplanarity of two lines)

मान लीजिए कि दो ज्ञात रेखाएँ:

$$\vec{r} = \vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1 \qquad \ldots (1)$$

तथा $\qquad \vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ हैं ... (2)

रेखा (1) बिंदु A, जिसकी स्थिति सदिश $\vec{a}_1$ है, से होकर जाती है तथा $\vec{b}_1$ के समांतर है। रेखा (2) बिंदु B जिसकी स्थिति सदिश $\vec{a}_2$ है, से होकर जाती है तथा $\vec{b}_2$ के समांतर है। तब

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

ज्ञात रेखाएँ सह-तलीय हैं, यदि और केवल यदि $\overrightarrow{AB}, \vec{b}_1$ और $\vec{b}_2$ सह-तलीय हैं। अर्थात्

$$\overrightarrow{AB}.(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0 \text{ या } (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

कार्तीय रूप (Cartesian Form)

मान लीजिए कि बिंदुओं A और B के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) हैं। मान लीजिए कि $\vec{b}_1$ और $\vec{b}_2$ के दिक्-अनुपात क्रमशः a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 है। तब

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\vec{b}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}; \text{ और } \vec{b}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$$

ज्ञात रेखाएँ सह-तलीय हैं, यदि और केवल यदि $\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$ जिसे निम्नलिखित कार्तीय रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{... (4)}$$

उदाहरण 21 दर्शाइए कि रेखाएँ

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5} \text{ तथा } \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5} \text{ सह-तलीय हैं।}$$

हल यहाँ हमें ज्ञात है कि $x_1 = -3, y_1 = 1, z_1 = 5, a_1 = -3, b_1 = 1, c_1 = 5$

$$x_2 = -1, y_2 = 2, z_2 = 5, a_2 = -1, b_2 = 2, c_2 = 5$$

अब निम्नलिखित सारणिक लेने पर हम पाते हैं कि

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

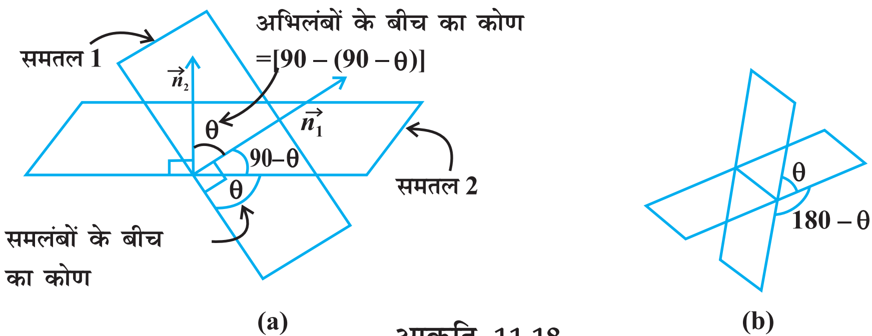
इसलिए रेखाएँ सम-तलीय हैं।

11.8 दो समतलों के बीच का कोण (Angle between two planes)

परिभाषा 2 दो समतलों के बीच का कोण उनके अभिलंबों के मध्यस्थ कोण द्वारा परिभाषित है (आकृति 11.18 (a))। ध्यान दीजिए कि यदि दो समतलों के बीच का कोण θ है तो $180 - \theta$ (आकृति 11.18 (b)) भी उनके बीच का कोण है। हम न्यून कोण को ही समतलों के बीच का कोण लेंगे।

मान लीजिए कि समतलों, $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1$ और $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2$ के बीच का कोण θ है। तब किसी सार्व बिंदु से समतलों पर खींचे गए अभिलंबों के बीच का कोण θ है।

तब
$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}\right|$$



आकृति 11.18

> **टिप्पणी** दोनों समतल परस्पर लंबवत् है यदि $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$ और समांतर है यदि $\vec{n}_1$ और $\vec{n}_2$ समांतर हैं।

कार्तीय रूप (Cartesian Form)

मान लीजिए समतलों:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ और } A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

के बीच का कोण θ है।

तो समतलों के अभिलंब के दिक्-अनुपात क्रमशः A_1, B_1, C_1 और A_2, B_2, C_2 है। इसलिए

$$\cos\theta = \left|\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|$$

> **टिप्पणी**
>
> 1. यदि दोनों समतल परस्पर लंब है तब $\theta = 90°$ और इस तरह $\cos\theta = 0$. अतः $\cos\theta = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

2. यदि दोनों समतल समांतर हैं तो $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

उदाहरण 22 दो समतलों $2x + y - 2z = 5$ और $3x - 6y - 2z = 7$ के बीच का कोण सदिश विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल दो समतलों के बीच का कोण वही है जो उनके अभिलंबों के बीच का कोण है। समतलों के दिए गए समीकरणों से समतलों के सदिश अभिलंब

$$\vec{N}_1 = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \text{ और } \vec{N}_2 = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k} \text{ हैं।}$$

इसलिए
$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|}\right| = \left|\frac{(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})\cdot(3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{4+1+4}\ \sqrt{9+36+4}}\right| = \left(\frac{4}{21}\right)$$

अतः
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$$

उदाहरण 23 दो समतलों $3x - 6y + 2z = 7$ और $2x + 2y - 2z = 5$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल समतलों की ज्ञात समीकरणों की तुलना समीकरणों

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ और } A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

से करने पर हम पाते हैं कि:
$$A_1 = 3, B_1 = -6, C_1 = 2$$
$$A_2 = 2, B_2 = 2, C_2 = -2$$

पुनः
$$\cos\theta = \left|\frac{3\times 2 + (-6)\ (2) + (2)\ (-2)}{\sqrt{\left(3^2 + (-6)^2 + (-2)^2\right)}\ \sqrt{\left(2^2 + 2^2 + (-2)^2\right)}}\right|$$

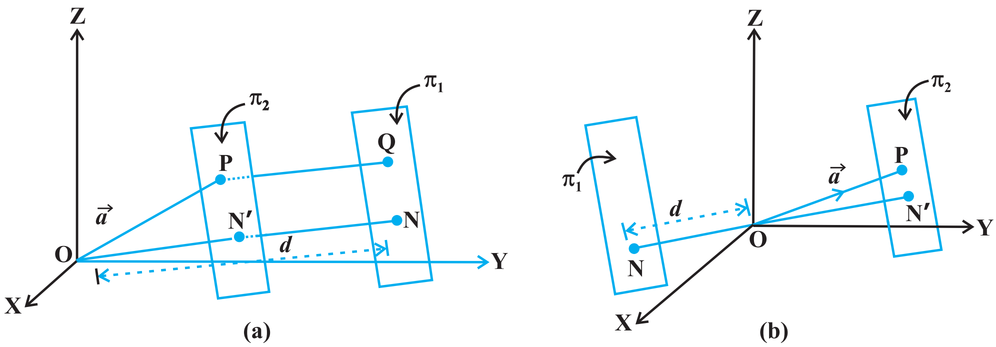
$$= \left|\frac{-10}{7\times 2\sqrt{3}}\right| = \frac{5}{7\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{21}$$

इसलिए
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{21}\right)$$

11.9 समतल से दिए गए बिंदु की दूरी (Distance of a point from a plane)

सदिश रूप (Vector Form)

एक बिंदु P जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ और एक समतल π_1 जिसका समीकरण $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ (आकृति 11.19) पर विचार कीजिए।



आकृति 11.19

पुनः बिंदु P से समतल π_1 के समांतर समतल π_2 पर विचार कीजिए। समतल π_2 के अभिलंब इकाई सदिश $\hat{n}$ है। अतः इसका समीकरण $(\vec{r} - \vec{a})\cdot\hat{n} = 0$ है।

अर्थात् $$\vec{r}\cdot\hat{n} = \vec{a}\cdot\hat{n}$$

अतः, मूल बिंदु से इस समतल की दूरी $ON' = |\vec{a}\cdot\hat{n}|$ है। इसलिए P से समतल π_1 से दूरी (आकृति 11.21 (a))

$$PQ = ON - ON' = |d - \vec{a}\cdot\hat{n}|$$

है, जो एक बिंदु से ज्ञात समतल पर लंब की लंबाई है। आकृति 11.19 (b) के लिए हम इसी प्रकार का परिणाम स्थापित कर सकते हैं।

टिप्पणी

1. यदि समतल π_2 का समीकरण $\vec{r}\,.\,\vec{N} = d$, के रूप का है, जहाँ $\vec{N}$ समतल पर अभिलंब है तो लांबिक दूरी $\dfrac{|\vec{a}\,.\,\vec{N} - d|}{|\vec{N}|}$ है।

2. मूल बिंदु O से समतल $\vec{r}\,.\,\vec{N} = d$ की दूरी $\dfrac{|d|}{|\vec{N}|}$ है (क्योंकि $\vec{a} = 0$)।

कार्तीय रूप (Cartesian Form)

मान लीजिए कि $P(x_1, y_1, z_1)$ एक दिया बिंदु है जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है तथा दिए समतल का कार्तीय समीकरण

$$Ax + By + Cz = D \text{ है}$$

तब
$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$
$$\vec{N} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$$

अतः (1) के द्वारा P से समतल पर लंब की लंबाई

$$\left|\frac{(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})\cdot(A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}) - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

उदाहरण 24 बिंदु (2, 5, – 3) की समतल $\vec{r}\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{N} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ और $d = 4$.

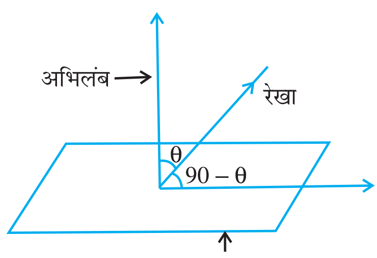
इसलिए बिंदु (2, 5, – 3) की दिए समतल से दूरी है:

$$\frac{|(2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) - 4|}{|6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}|}$$

$$= \frac{|12 - 15 - 6 - 4|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{13}{7}$$

11.10 एक रेखा और एक समतल के बीच का कोण (Angle between a line and a plane)

परिभाषा 2 एक रेखा और एक समतल के बीच का कोण, रेखा और समतल के अभिलंब के बीच के कोण का कोण (complementary angle) पूरक होता है (आकृति 11.20)।



आकृति 11.20

सदिश रूप (Vector Form)

मान लीजिए कि रेखा का समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ है तथा समतल का समीकरण $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$ है। तब रेखा और समतल के

अभिलंब के बीच का कोण θ, निम्नलिखित सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{n}|}\right|$$

और इस प्रकार रेखा और समतल के बीच का कोण ϕ, $90° - \theta$, द्वारा प्रदत्त है अर्थात्

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$$

अर्थात्, $$\sin\phi = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\ |\vec{n}|}\right| \text{ या } \phi = \sin^{-1}\left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$$

उदाहरण 25 रेखा $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ और समतल $10x + 2y - 11z = 3$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि रेखा ओर समतल के अभिलंब के बीच का कोण θ है। दिए गए रेखा तथा समतल के समीकरणों को सदिश रूप में व्यक्त करने पर हम

$$\vec{r} = (-\hat{i} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

और $\vec{r}\cdot(10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}) = 3$ प्राप्त करते हैं।

यहाँ $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ और $\vec{n} = 10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}$

अत: $$\sin\phi = \left|\frac{(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})\cdot(10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k})}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}\ \sqrt{10^2 + 2^2 + 11^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-40}{7\times 15}\right| = \left|\frac{-8}{21}\right| = \frac{8}{21} \text{ या } \phi = \sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$$

प्रश्नावली 11.3

1. निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में समतल के अभिलंब की दिक्-कोसाइन और मूल बिंदु से दूरी ज्ञात कीजिए:
   (a) $z = 2$ (b) $x + y + z = 1$
   (c) $2x + 3y - z = 5$ (d) $5y + 8 = 0$
2. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूल बिंदु से 7 मात्रक दूरी पर है, और सदिश $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ पर अभिलंब है।

3. निम्नलिखित समतलों का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए:

(a) $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=2$ (b) $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k})=1$

(c) $\vec{r}\cdot[(s-2t)\,\hat{i}+(3-t)\,\hat{j}+(2s+t)\,\hat{k}]=15$

4. निम्नलिखित स्थितियों में, मूल बिंदु से खींचे गए लंब के पाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(a) $2x+3y+4z-12=0$ (b) $3y+4z-6=0$

(c) $x+y+z=1$ (d) $5y+8=0$

5. निम्नलिखित प्रतिबंधों के अंतर्गत समतलों का सदिश एवं कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो:

(a) बिंदु $(1, 0, -2)$ से जाता हो और $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ समतल पर अभिलंब है।

(b) बिंदु $(1,4, 6)$ से जाता हो और $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ समतल पर अभिलंब सदिश है।

6. उन समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निम्नलिखित तीन बिंदुओं से गुजरता है।

(a) $(1, 1, -1)$, $(6, 4, -5)$, $(-4, -2, 3)$

(b) $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(-2, 2, -1)$

7. समतल $2x+y-z=5$ द्वारा काटे गए अंत: खंडों को ज्ञात कीजिए।

8. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका y-अक्ष पर अंत:खंड 3 और जो तल ZOX के समांतर है।

9. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $3x-y+2z-4=0$ और $x+y+z-2=0$ के प्रतिच्छेदन तथा बिंदु $(2, 2, 1)$ से होकर जाता है।

10. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $\vec{r}\,.(2\,\hat{i}+2\,\hat{j}-3\,\hat{k})=7$, $\vec{r}\,.(2\,\hat{i}+5\,\hat{j}+3\,\hat{k})=9$ के प्रतिच्छेदन रेखा और $(2, 1, 3)$ से होकर जाता है।

11. तलों $x+y+z=1$ और $2x+3y+4z=5$ के प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले तथा तल $x-y+z=0$ पर लंबवत् तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

12. समतलों, जिनके सदिश समीकरण $\vec{r}\cdot(2\,\hat{i}+2\,\hat{j}-3\,\hat{k})=5$ और $\vec{r}\cdot(3\,\hat{i}-3\,\hat{j}+5\,\hat{k})=3$ हैं, के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

13. निम्नलिखित प्रश्नों में ज्ञात कीजिए कि क्या दिए गए समतलों के युग्म समांतर है अथवा लंबवत् हैं, और उस स्थिति में, जब ये न तो समांतर है और न ही लंबवत् तो उनके बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

(a) $7x+5y+6z+30=0$ और $3x-y-10z+4=0$

(b) $2x+y+3z-2=0$ और $x-2y+5=0$

(c) $2x-2y+4z+5=0$ और $3x-3y+6z-1=0$

(d) $2x-y+3z-1=0$ और $2x-y+3z+3=0$

(e) $4x+8y+z-8=0$ और $y+z-4=0$

14. निम्नलिखित प्रश्नों में प्रत्येक दिए गए बिंदु से दिए गए संगत समतलों की दूरी ज्ञात कीजिए।

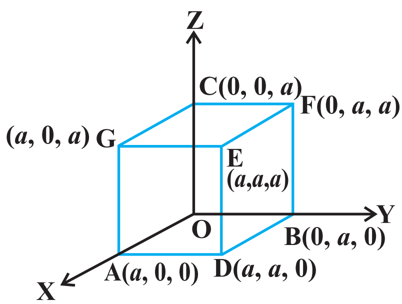
	बिंदु	**समतल**
(a)	(0, 0, 0)	$3x - 4y + 12z = 3$
(b)	(3, – 2, 1)	$2x - y + 2z + 3 = 0$
(c)	(2, 3, – 5)	$x + 2y - 2z = 9$
(d)	(– 6, 0, 0)	$2x - 3y + 6z - 2 = 0$

विविध उदाहरण

उदाहरण 26 एक रेखा, एक घन के विकर्णों के साथ α, β, γ, δ, कोण बनाती है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$$

हल एक घन, एक समकोणिक षट्फलकीय होता है जिसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान होते हैं।



आकृति 11.21

मान लीजिए कि OADBEFCG एक घन जिसकी प्रत्येक भुजा a लंबाई की है (आकृति 11.21)।

OE, AF, BG और CD चार विकर्ण हैं।

दो बिंदुओं O तथा E को मिलाने वाली रेखा OE अर्थात् विकर्ण OE के दिक्-कोसाइन

$$\frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}$$

अर्थात् $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

हैं। इसी प्रकार AF, BG और CD की दिक्-कोसाइन क्रमशः

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ और } \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ हैं।}$$

मान लीजिए दी गई रेखा जो OE, AF, BG, और CD, के साथ क्रमशः α, β, γ, और δ कोण बनाती है, की दिक्-कोसाइन l, m, n हैं।

तब $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(l + m + n); \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(-l + m + n)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}(l - m + n); \cos\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}(l + m - n)$$

वर्ग करके जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$$

$$= \frac{1}{3}\ [\ (l+m+n\ )^2 + (-l+m+n)^2\ ]\ + (l-m+n)^2 + (l+m-n)^2]$$

$$= \frac{1}{3}\ [\ 4\ (l^2+m^2+n^2\ )\ ]\ = \frac{4}{3}\ \ (\text{क्योंकि } l^2+m^2+n^2=1)$$

उदाहरण 27 उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें बिंदु (1, – 1, 2) अंतर्विष्ट है और जो समतलों $2x + 3y - 2z = 5$ और $x + 2y - 3z = 8$ में से प्रत्येक पर लंब है।

हल दिए गए बिंदु को अंतर्विष्ट करने वाले समतल का समीकरण

$$\text{A}\ (x-1) + \text{B}(y+1) + \text{C}\ (z-2) = 0 \text{ है।} \qquad \text{... (1)}$$

समतलों $2x + 3y - 2z = 5$ और $x + 2y - 3z = 8$, के साथ (1) द्वारा प्रदत्त समतल पर लंब होने के प्रतिबंध का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$2\text{A} + 3\text{B} - 2\text{C} = 0 \text{ और } \text{A} + 2\text{B} - 3\text{C} = 0$$

इन समीकरणों को हल करने पर हम पाते हैं कि A = – 5C और B = 4C

अत: अभीष्ट समीकरण है:

$$-5\text{C}\ (x-1) + 4\ \text{C}\ (y+1) + \text{C}(z-2) = 0$$

अर्थात् $\qquad 5x - 4y - z = 7$

उदाहरण 28 बिंदु P(6, 5, 9) से बिंदुओं A (3, – 1, 2), B (5, 2, 4) और C(– 1, – 1, 6) द्वारा निर्धारित समतल की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि समतल में तीन बिंदु A, B, तथा C हैं। बिंदु P से समतल पर लंब का पाद D है। हमें अभीष्ट दूरी PD ज्ञात करनी है जहाँ PD , $\overrightarrow{\text{AP}}$ का $\overrightarrow{\text{AB}} \times \overrightarrow{\text{AC}}$ पर प्रक्षेप है।

अत: $\qquad$ PD = $\overrightarrow{\text{AB}} \times \overrightarrow{\text{AC}}$ के अनुदिश इकाई सदिश तथा $\overrightarrow{\text{AP}}$ का अदिश गुणनफल है।

पुन: $\qquad \overrightarrow{\text{AP}} = 3\ \hat{i} + 6\ \hat{j} + 7\ \hat{k}$

और
$$\overrightarrow{\text{AB}} \times \overrightarrow{\text{AC}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\hat{i} - 16\hat{j} + 12\hat{k}$$

$\overrightarrow{\text{AB}} \times \overrightarrow{\text{AC}}$ के अनुदिश इकाई सदिश $= \dfrac{3\,\hat{i} - 4\,\hat{j} + 3\,\hat{k}}{\sqrt{34}}$

अत: $$\overrightarrow{PD} = (3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}) \cdot \frac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}}$$

$$= \frac{3\sqrt{34}}{17}$$

विकल्पत: बिंदु A, B और C से गुज़रने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए और तब बिंदु P की समतल से दूरी ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 29 दर्शाइए कि रेखाएँ

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta}$$

और $$\frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$ सह-तलीय हैं।

हल यहाँ ज्ञात है कि

$$x_1 = a-d \quad \text{और} \quad x_2 = b-c$$
$$y_1 = a \qquad y_2 = b$$
$$z_1 = a+d \qquad z_2 = b+c$$

और
$$a_1 = \alpha-\delta \qquad a_2 = \beta-\gamma$$
$$b_1 = \alpha \qquad b_2 = \beta$$
$$c_1 = \alpha+\delta \qquad c_2 = \beta+\gamma$$

अब सारणिक

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-c-a+d & b-a & b+c-a-d \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}$$

पर विचार कीजिए।

तीसरे स्तंभ को पहले स्तंभ में जोड़ने पर हम पाते हैं।

$$2\begin{vmatrix} b-a & b-a & b+c-a-d \\ \alpha & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix} = 0$$

क्योंकि प्रथम और द्वितीय स्तंभ समान हैं। अत: दोनों रेखाएँ सह-तलीय हैं।

उदाहरण 30 उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिंदुओं A(3, 4, 1) और B(5, 1, 6) को मिलाने वाली रेखा XY-तल को काटती हैं।

हल बिंदुओं A और B से जाने वाली रेखा का सदिश समीकरणः

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda [(5-3)\hat{i} + (1-4)\hat{j} + (6-1)\hat{k}]$$

अर्थात् $\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda (2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$ है ... (1)

मान लीजिए P वह बिंदु है जहाँ रेखा AB, XY-तल को प्रतिच्छेद करती है। तब बिंदु P का स्थिति सदिश $x\hat{i} + y\hat{j}$ के रूप में है।

यह बिंदु अवश्य ही समीकरण (1) को संतुष्ट करता है। (क्यों?)

अर्थात् $x\hat{i} + y\hat{j} = (3+2\lambda)\hat{i} + (4-3\lambda)\hat{j} + (1+5\lambda)\hat{k}$

$\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$, के गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं

$$x = 3 + 2\lambda$$
$$y = 4 - 3\lambda$$
$$0 = 1 + 5\lambda$$

उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर हम पाते हैं कि

$$x = \frac{13}{5} \text{ और } y = \frac{23}{5}$$

अतः अभीष्ट बिंदु के निर्देशांक $\left(\frac{13}{5}, \frac{23}{5}, 0\right)$ हैं।

अध्याय 11 पर विविध प्रश्नावली

1. दिखाइए कि मूल बिंदु से (2, 1, 1) मिलाने वाली रेखा, बिंदुओं (3, 5 –1) और (4, 3,–1) से निर्धारित रेखा पर लंब है।

2. यदि दो परस्पर लंब रेखाओं की दिक्-कोसाइन l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 हों तो दिखाइए कि इन दोनों पर लंब रेखा की दिक्-कोसाइन
$m_1 n_2 - m_2 n_1, n_1 l_2 - n_2 l_1, l_1 m_2 - l_2 - m_1$ हैं।

3. उन रेखाओं के मध्य कोण ज्ञात कीजिए, जिनके दिक्-अनुपात a, b, c और $b-c, c-a, a-b$ हैं।

4. x-अक्ष के समांतर तथा मूल-बिंदु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

5. यदि बिंदुओं A, B, C, और D के निर्देशांक क्रमशः (1, 2, 3), (4, 5, 7), (– 4, 3, – 6) और (2, 9, 2) हैं तो AB और CD रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

6. यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2k}=\frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3k}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-5}$ परस्पर लंब हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

7. बिंदु $(1, 2, 3)$ से जाने वाली तथा तल $\vec{r}\,.\,(\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k})+9=0$ पर लंबवत् रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. बिंदु (a, b, c) से जाने वाले तथा तल $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=2$ के समांतर तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. रेखाओं $\vec{r}=6\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$ और

$\vec{r}=-4\hat{i}-\hat{k}+\mu(3\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

10. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिंदुओं $(5, 1, 6)$ और $(3, 4, 1)$ को मिलाने वाली रेखा YZ-तल को काटती है।

11. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिंदुओं $(5, 1, 6)$ और $(3, 4, 1)$ को मिलाने वाली रेखा ZX-तल को काटती है।

12. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिंदुओं $(3, -4, -5)$ और $(2, -3, 1)$ से गुज़रने वाली रेखा, समतल $2x+y+z=7$ के पार जाती है।

13. बिंदु $(-1, 3, 2)$ से जाने वाले तथा समतलों $x+2y+3z=5$ और $3x+3y+z=0$ में से प्रत्येक पर लंब समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

14. यदि बिंदु $(1, 1, p)$ और $(-3, 0, 1)$ समतल $\vec{r}\cdot(3\hat{i}+4\hat{j}-12\hat{k})+13=0$ से समान दूरी पर स्थित हों, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

15. समतलों $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=1$ और $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+4=0$ के प्रतिच्छेदन रेखा से जाने वाले तथा x-अक्ष के समांतर तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

16. यदि O मूल बिंदु तथा बिंदु P के निर्देशांक $(1, 2, -3)$, हैं तो बिंदु P से जाने वाले तथा OP के लंबवत् तल का समीकरण ज्ञात कीजिए। .

17. समतलों $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-4=0$ और $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+5=0$ के प्रतिच्छेदन रेखा को अंतर्विष्ट करने वाले तथा तल $\vec{r}\cdot(5\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})+8=0$ के लंबवत् तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

18. बिंदु $(-1, -5, -10)$ से रेखा $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})$ और समतल $\vec{r}\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$ के प्रतिच्छेदन बिंदु के मध्य की दूरी ज्ञात कीजिए।

19. बिंदु $(1, 2, 3)$ से जाने वाली तथा समतलों $\vec{r}\cdot(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=5$ और $\vec{r}\cdot(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ के समांतर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

20. बिंदु $(1, 2, -4)$ से जाने वाली और दोनों रेखाओं $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y+19}{-16}=\dfrac{z-10}{7}$ और $\dfrac{x-15}{3}=\dfrac{y-29}{8}=\dfrac{z-5}{-5}$ पर लंब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

21. यदि एक समतल के अंत:खंड a, b, c हैं और इसकी मूल बिंदु से दूरी p इकाई हैं तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{p^2}$

प्रश्नों 22 और 23 में सही उत्तर का चुनाव कीजिए।

22. दो समतलों $2x + 3y + 4z = 4$ और $4x + 6y + 8z = 12$ के बीच की दूरी है:

(A) 2 इकाई (B) 4 इकाई (C) 8 इकाई (D) $\dfrac{2}{\sqrt{29}}$ इकाई

23. समतल $2x - y + 4z = 5$ और $5x - 2.5y + 10z = 6$ हैं:

(A) परस्पर लंब (B) समांतर

(C) y-अक्ष पर प्रतिच्छेदन करते हैं। (D) बिंदु $\left(0, 0, \dfrac{5}{4}\right)$ से गुजरते हैं।

सारांश

- **एक रेखा की दिक्-कोसाइन** रेखा द्वारा निर्देशांक्षों की धन दिशा के साथ बनाए कोणों की कोसाइन होती है।
- यदि एक रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n हैं तो $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
- दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन

  $\dfrac{x_2-x_1}{PQ}, \dfrac{y_2-y_1}{PQ}, \dfrac{z_2-z_1}{PQ}$ हैं

  जहाँ $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
- **एक रेखा का दिक्-अनुपात** वे संख्याएँ हैं जो रेखा की दिक्-कोसाइन के समानुपाती होती हैं।

- यदि एक रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n और दिक्-अनुपात a, b, c हैं तो

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ ;\ m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ ;\ n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- **विषमतलीय रेखाएँ** अंतरिक्ष की वे रेखाएँ जो न तो समांतर हैं और न ही प्रतिच्छेदी हैं। यह रेखाएँ विभिन्न तलों में होती हैं।
- **विषमतलीय रेखाओं के बीच का कोण** वह कोण है जो एक किसी बिंदु (वरीयता मूल बिंदु की) से विषमतलीय रेखाओं में से प्रत्येक के समांतर खींची गई दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच में है।
- यदि l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 दिक्-कोसाइन वाली दो रेखाओं के बीच न्यूनकोण θ है तब

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$$

- यदि a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 दिक्-अनुपातों वाली दो रेखाओं के बीच का न्यून कोण θ है तब

$$\cos\theta = \left| \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right|$$

- एक ज्ञात बिंदु जिसकी स्थिति सदिश $\vec{a}$ है से गुज़रने वाली और सदिश $\vec{b}$ के समांतर रेखा का सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ है।
- बिंदु (x_1, y_1, z_1) से जाने वाली रेखा जिसकी दिक्-कोसाइन l, m, n हैं, का समीकरण $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ है।
- दो बिंदुओं जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ है से जाने वाली रेखा के समीकरण का सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ है।
- दो बिंदुओं (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) से जाने वाली रेखा का कार्तीय समीकरण

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$ हैं।

- यदि दो रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$, के बीच का न्यूनकोण θ है तो

$$\cos\theta = \left| \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1|\,|\vec{b}_2|} \right|$$

◆ यदि दो रेखाओं $\dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$ और

$\dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$ के बीच का कोण θ है तब

$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$.

◆ दो विषमतलीय रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी वह रेखाखंड है जो दोनों रेखाओं पर लंब हैं।

◆ दो रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ के बीच न्यूनतम दूरी

$$\left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \text{ है।}$$

◆ दो रेखाओं $\dfrac{x-x_1}{a_1} = \dfrac{y-y_1}{b_1} = \dfrac{z-z_1}{c_1}$ और $\dfrac{x-x_2}{a_2} = \dfrac{y-y_2}{b_2} = \dfrac{z-z_2}{c_2}$ के बीच न्यूनतम दूरी

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}} \text{ है।}$$

◆ दो समांतर रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}$ के बीच की दूरी

$$\left|\frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right| \text{ है।}$$

◆ एक समतल, जिसकी मूल बिंदु से दूरी d तथा समतल पर मूल बिंदु से अभिलंब इकाई सदिश $\hat{n}$ है, का सदिश रूप में समीकरण $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ है।

◆ एक समतल, जिसकी मूल बिंदु से दूरी d तथा समतल के अभिलंब की दिक्-कोसाइन l, m, n है, का समीकरण $lx + my + nz = d$ है।

◆ एक बिंदु जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ से जाने वाला और सदिश $\vec{N}$ पर लंब समतल का समीकरण $(\vec{r} - \vec{a}).\vec{N} = 0$ है।

- एक दिए गए बिंदु (x_1, y_1, z_1) जाने वाले और एक दी गई रेखा जिसके दिक्-अनुपात A, B, C है, पर लंब समतल का समीकरण $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ है।
- तीन असंरेख बिंदुओं (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) और (x_3, y_3, z_3) से जाने वाले समतल का समीकरण है:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- तीन बिंदुओं जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ को अंतर्विष्ट करने वाले समतल का सदिश समीकरण $(\vec{r} - \vec{a}) . [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = 0$
- एक समतल जो निर्देशांक्षों को $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ और $(0, 0, c)$ पर काटता है, का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ है।
- समतलों $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1$ और $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2$ के प्रतिच्छेदन से गुजरने वाले समतल का सदिश समीकरण $\vec{r} \cdot (\vec{n}_1 + \lambda \vec{n}_2) = d_1 + \lambda d_2$ है, जहाँ λ एक प्राचल है।
- समतलों
  $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$
  और $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$
  के प्रतिच्छेदन से गुजरने वाले समतल का समीकरण
  $(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$ है।
- दो रेखाएं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ सह-तलीय हैं यदि

$$(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

- यदि उपरोक्त रेखाएं बिंदुओं $A(x_1, y_1, z_1)$ तथा $B(x_2, y_2, z_2)$ से गुज़रती है तब समतलीय हैं यदि $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$
- दो तल जिसके सदिश रूप $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1$ और $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2$ हैं तथा इनके बीच का न्यून कोण θ है तब $\theta = \cos^{-1} \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

- रेखा $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ और तल $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ के बीच का न्यून कोण ϕ है तब

$$\sin \phi = \left| \frac{\vec{b} \cdot \hat{n}}{|\vec{b}||\hat{n}|} \right|$$

- तलों $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ तथा
$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ के बीच का न्यून कोण θ है तब

$$\theta = \cos^{-1} \left| \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|$$

- सदिश रूप में, एक बिंदु जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है, से तल $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ से दूरी $|d - \vec{a} \cdot \hat{n}|$ है।
- एक बिंदु (x_1, y_1, z_1) की तल $Ax + By + Cz + D = 0$ से दूरी

$$\left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \text{ है।}$$