

अध्याय—2

बहुपद महत्वपूर्ण बिंदु

- एक चर x में बहुपद $p(x)$ निम्न प्रकार का एक बीजीय व्यंजक होता है,
 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, जहाँ
 - (i) $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ अचर हैं और $a_n \neq 0$.
 - (ii) $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ क्रमशः x^0, x, x^2, \dots, x^n के गुणांक हैं।
 - (iii) प्रत्येक $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ बहुपद के पद कहलाते हैं।
- (IV) n बहुपद की घात कहलाता है जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।
- 2. **बहुपद की घात:** एक बहुपद में चर की अधिकतम घात वाले पद की घातांक को बहुपद की घात कहा जाता है।
- 3. **बहुपद के प्रकार :** सामान्यतः हम बहुपदों को निम्न रूप में वर्गीकृत कर सकते हैं।

(i) घात के आधार पर :

घात	बहुपद	सामान्य रूप	उदाहरण
(a) 1	रैखिक बहुपद	$ax + b$	$x + 1, 2x$ इत्यादि
(b) 2	द्विघातीय बहुपद	$ax^2 + bx + c$	$4x^2 + 5x + \frac{2}{3}$ इत्यादि
(c) 3	त्रिघातीय बहुपद	$ax^3 + bx^2 + cx + d$	$x^3 - 3x^2 + 5$ इत्यादि
(d) 4	द्विवर्ग बहुपद	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	$x^4 - 16$ इत्यादि

Note : घात 5 और उससे अधिक वाले बहुपद के लिए कोई विशेष नाम नहीं होता है।

(ii) पदों के आधार पर

	पदों की संख्या	बहुपद	उदाहरण
(a)	1	एकपदी	5, 3x, $1/3 y$
(b)	2	द्विपदी	$\sqrt{3}+6x$, $x-5y$, $x^2 + 2$
(c)d	3	त्रिपदी	$\sqrt{2}x^2 + 4x + 2$, $5y^4 + 2y + 6$

Note : चार या उससे अधिक पद वाले बहुपदों के लिए कोई विशेष नाम नहीं होता। इनको सामान्यतः बहुपद कहते हैं।

(iii) शून्य घात वाला बहुपद या शून्येतर अचर बहुपद : शून्येतर (शून्य को छोड़कर) संख्या (अचर) को शून्य घात वाला बहुपद या शून्येतर अचर बहुपद कहते हैं।

अर्थात् $p(x) = a$ जहाँ पर $a \neq 0$ एक शून्य घात वाला बहुपद है क्योंकि $p(x) = a$ को $p(x) = ax^0$ लिखा जा सकता है।

उदाहरणतया $5 = 5x^0$, $\frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2} x^0$

(iv) शून्य बहुपद : एक बहुपद जिसके सभी गुणांक शून्य हों, शून्य बहुपद कहलाता है अर्थात् $p(x) = 0$ शून्य बहुपद की घात परिभाषित नहीं है।

4. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए यदि $p(a) = 0$ जहाँ a वास्तविक संख्या है, हम कह सकते हैं कि 'a' बहुपद का शून्यक है।
5. यदि $p(x)$ एक या एक से अधिक घात का बहुपद हो तथा $p(x)$ को एक रैखिक बहुपद $x - a$, से भाग किया जाए तो शेषफल $p(a)$ होगा इसे शेषफल प्रमेय कहते हैं।

6. यदि $p(x)$ एक बहुपद है जिसकी घात एक या एक से अधिक है तथा a एक वास्तविक संख्या है तो

(i) $(x-a)$, बहुपद $p(x)$ का एक गुणखण्ड होगा यदि $p(a) = 0$

(ii) यदि $p(a) = 0$, $(x-a)$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणखण्ड है। इसे गुणखण्ड प्रमेय कहते हैं।

7. एक 'n' घात के बहुपद के अधिकतम 'n' शून्यक हो सकते हैं।

* बीजीय सर्वसमिकायें

(I) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

(ii) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

(iii) $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

(iv) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

(v) $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

(vi) $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$

(vii) $(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$

(viii) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

ix) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

x) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$$= \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$$

xi) यदि $x+y+z=0$, है तो $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

खण्ड - अ

1. $5y^3 + 2y^2 - y + 5$ में y^3 का गुणांक क्या है?
2. $(x^2 - 1)(x - 2)$ के गुणनफल में x^2 का गुणांक लिखिए?
3. यदि $3x - 2a$ का एक गुणनखण्ड $(x - 2)$ हो तो a का मान ज्ञात कीजिए।
4. बहुपद $\frac{x^3 + 3x - 1}{5} - \frac{5}{2}x^2 - x^5$ की घात ज्ञात कीजिए।
5. यदि $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ तो $p(1) + p(-1)$ का मान ज्ञात कीजिए?
6. बहुपद $z^2 - 8$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।
7. भाज्य = भाजक \times भागफल + _____.
8. त्रिपदी बहुपद का एक उदाहरण लिखिये जिसकी घात 3 हो।
9. एकपदी, द्विपदी तथा द्विघातीय बहुपद का एक-एक उदाहरण लिखिए।
10. जाँच कीजिए कि क्या $x = 3$ बहुपद $x^2 - 3x + x - 3$ का एक शून्यक है।
11. बहुपद $\sqrt{7}$ की घात क्या है?
12. यदि बहुपद $3x^2 + 5x + k$ का एक शून्यक -1 , है तो k का मान ज्ञात कीजिए।
13. $4x^2 - 4x + 1$ को द्विपदी बहुपद के वर्ग के रूप में लिखिए।

खण्ड-ब

14. जाँच कीजिए कि $q(x), r(x)$ का गुणज है या नहीं जहाँ $q(x) = 2x^3 - 11x^2 - 4x + 5$, तथा $r(x) = 2x + 1$.
15. दर्शाइए कि $(x - 5)$ बहुपद $x^3 - 3x^2 - 4x - 30$ का एक गुणनखण्ड है?
16. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(997)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

17. बहुपद $p(x) = x(x-2)(x+3)$ के शून्यक ज्ञात कीजिए?
18. $3x^2 - 7x - 6$ को $(x-3)$ से भाग देने पर भागफल ज्ञात कीजिए?
19. गुणनखण्ड कीजिए : $8x^3 + \sqrt{27}y^3$.
20. यदि $p(x) = x + 9$ है तो $p(x) + p(-x)$ ज्ञात कीजिए।
21. सीधे गुणा न करके 106×94 का मान ज्ञात कीजिए।
22. यदि $36x^2 - b = \left(6x + \frac{1}{5}\right)\left(6x - \frac{1}{5}\right)$ तो b का मान ज्ञात कीजिए।
23. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(2x - 3y + z)^2$ को प्रसारित कीजिए।
24. $(351)^2 - (350)^2$ का मान ज्ञात कीजिए?

खण्ड स

25. गुणनखण्ड कीजिए : $64a^2 + 96ab + 36b^2$
26. गुणनखण्ड कीजिए : $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
27. यदि $x^2 + y^2 = 49$ तथा $x - y = 3$ तो $x^3 - y^3$ का मान ज्ञात कीजिए।
28. सरल करो : $(5a - 2b)(25a^2 + 10ab + 4b^2) - (2a + 5b)(4a^2 - 10ab + 25b^2)$
29. यदि $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$ को $(x - 1)$ तथा $(x + 2)$ से भाग किया जाए तो इस प्रकार प्राप्त शेषफलों का योग ज्ञात कीजिए।
30. गुणनफल ज्ञात कीजिए: $\left(p - \frac{1}{p}\right)\left(p + \frac{1}{p}\right)\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)\left(p^4 + \frac{1}{p^4}\right)$
31. $7\sqrt{2}k^2 - 10k - 4\sqrt{2}$ का गुणनखण्ड कीजिए।
32. सरल कीजिए: $(3x - 4y)^3 - (3x + 4y)^3$
33. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(2a)^3 + b^3 + (3c)^3 - 18abc$ को प्रसारित करिये।

34. सरल कीजिए: $(x + y + z)^2 - (x - y - z)^2$.

खण्ड द

35. गुणनखण्ड कीजिए: $125x^3 + 8y^3 - z^3 - 30xyz$.

36. $(x + 2)$, बहुपद $ax^3 + bx^2 + x - 2$ का एक गुणनखण्ड है तथा $(x - 2)$ से इस बहुपद को भाग देने पर शेषफल 4 प्राप्त होता है, तो a और b के मान ज्ञात कीजिए?

37. जाँच कीजिए कि बहुपद $p(t) = 6t^3 + 3t^2 + 3t + 18$, $(2t + 3)$ का एक गुणज है।

38. k का मान ज्ञात करो यदि $(x + k)$ बहुपद $x^3 + kx^2 - 2x + k + 4$ का एक गुणनखण्ड है तथा $x^4 - x$ का गुणनखण्ड कीजिए।

39. यदि $(x - 3)$ तथा $(x - \frac{1}{3})$ बहुपद $px^2 + 3x + r$, के गुणनखण्ड हों तो सिद्ध कीजिए कि $p = r$.

40. (i) उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके, $(-7)^3 + (5)^3 + (2)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) उस घन की विमाएँ ज्ञात करो जिसका आयतन व्यंजक $4x^2 + 14x + 6$ से प्रदर्शित होता है।

41. वह आयत जिसका क्षेत्रफल दिया गया है, की लम्बाई और चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिए।

(i) $(x^2 + 5\sqrt{5}x + 30)$ वर्ग इकाई

(ii) $(24x^2 - 26x - 8)$ वर्ग इकाई

42. कक्षा IX द्वारा NSS. के अन्तर्गत एक साक्षरता अभियान आयोजित किया गया, रैली हेतु छात्राओं ने $(x - 5)$ पंक्ति (rows), $(3x - 4)$ स्तम्भ (Column) बनाए। कुल छात्राओं की संख्या को बीजीय व्यंजक के रूप में दर्शाइए।
43. वृक्षारोपण कार्यक्रम के अन्तर्गत कक्षा IX के विद्यार्थियों ने कुल $(3x^2 - 4x - 4)$ वृक्ष लगाए। यदि विद्यार्थियों की संख्या $(x - 2)$ है तो प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा लगाए गए पेड़ों की संख्या ज्ञात कीजिए। (यह मानते हुए कि प्रत्येक विद्यार्थी समान संख्या में पेड़ लगाता है।)
44. यदि $a+b+c=0$ है तो

$$\frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} + \frac{(a+b)^2}{ab}$$
 का मान ज्ञात कीजिए
45. सरल कीजिए:

$$\frac{(a^2-b^2)^3 + (b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}$$
46. गुणनखण्ड कीजिए:

$$(2a-b-c)^3 + (2b-c-a)^3 + (2c-a-b)^3$$
47. यदि बहुपद $4x^3-16x^2+ax+7$, $x-1$ से पूर्णतया विभाजित हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए। इसका प्रयोग करते हुए, बहुपद का गुणनखंड कीजिए।
48. गुणनखंड कीजिए:

$$x^2 - \frac{13}{24}x - \frac{1}{12}$$
49. गुणनखंड कीजिए:

$$9x^3 - 27x^2 - 100x + 300$$

50. गुणनखंड कीजिए:

$$x^4 - 5x^2 + 4$$

51. यदि $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -1$, जहाँ $x \neq 0$, $y \neq 0$ तो $x^3 - y^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

52. सरल कीजिए।

$$\frac{155 \times 155 + 155 \times 55 + 55 \times 55}{155 \times 155 \times 155 - 55 \times 55 \times 55}$$

अध्याय—2

बहुपद

उत्तर

1. 5
2. -2
3. $a=3$
4. 5
5. -12
6. $+\sqrt{8}, -\sqrt{8}$
7. शेषफल
8. x^3-3x^2+2 या अन्य उदाहरण
9. $2x, 2x^2+3, x^2+2x-3$ या अन्य उदाहरण
10. हाँ
11. घात=0
12. $k=2$
13. $(2x-1)^2$
14. नहीं
15. संकेत $x=5$
16. 991026973
17. 0, 2, -3
18. $3x+2$
19. $(2x + \sqrt{3}y)(4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2)$
20. 18
21. संकेत $(100+6)(100-6)$
22. $\frac{1}{25}$
23. $4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4xz$
24. 701
25. $(8a+6b)^2$
26. $(x+1)(x+2)(x+3)$
27. 207
28. $117a^3-133b^3$
29. -34
30. $p^8 - \frac{1}{p^8}$
31. $(k - \sqrt{2})(7\sqrt{2}k + 4)$
32. $-8y(16y^2+27x^2)$ or $-128y^3-216x^2y$
33. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + 4 - \frac{1}{4}xy - y + 2x$
34. $4xy+4zx$
35. $(5x+2y+z)(25x^2+4y^2+z^2-10xy-2yz-5zx)$
36. $a=0, b=2$
37. हाँ
38. $k = \frac{4}{3}, x(x-1)(x^2+x+1)$

40. (i) -210 ; (ii) $2, (x+3), (2x+1)$
41. (i) $(x+2\sqrt{5}), (x+3\sqrt{5})$ (ii) $(4x+1), (6x-8)$
42. $3x^2-19x+20$
43. $(3x+2)$
44. 3 45. $(a+b)(b+c)(c+a)$
46. $3(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)$ 47. $a=5, (x-1)(2x+1)(2x-7)$
48. $\frac{1}{24}(3x-2)(8x+1)$ 49. $(3x+10)(x-3)(3x-10)$
50. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ 51. 0
52. 0.01

अभ्यास परीक्षा

बहुपद

Time : 50 Min.

M.M. 20

1. क्या $(x^2)^{1/2} + \sqrt[3]{5}$ एक बहुपद है? (1)
2. दर्शाइये कि $x = 1$, बहुपद $3x^3 - 4x^2 + 8x - 7$ का एक शून्यक है। (1)
3. बहुपद $x^2 - 4x + 3$ के शून्यक ज्ञात कीजिए। (2)
4. यदि $x + y + z = 16$, $xy + yz + zx = 11$ है तो $x^2 + y^2 + z^2$ का मान ज्ञात कीजिए। (2)
5. यदि $3x - 4$ बहुपद $p(x) = 2x^3 - 11x^2 + kx - 20$ का एक गुणनखंड है तो k का मान ज्ञात कीजिए। (3)
6. गुणनखंड कीजिए : $a^2 + b^2 + 2(ab + bc + ca)$ (3)
7. यदि $a + b + c = 0$ है तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए :
$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$$
 (4)
8. गुणनखंड प्रमेय की सहायता से $x^3 - 23x^2 - 142x - 120$ का गुणनखंड ज्ञात कीजिए। (4)