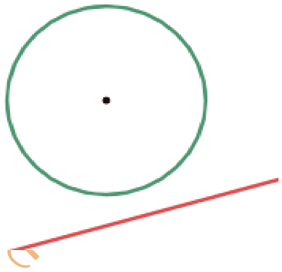
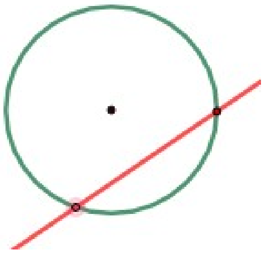
07 – 12 - 2020 ലെ ഓൺലൈൻ ക്ലാസ് ⇨ ക്ലിക്ക്

ഒരു വൃത്തവും വരയും നമുക്കെങ്ങനെയെല്ലാം ബന്ധപ്പെടുത്താം

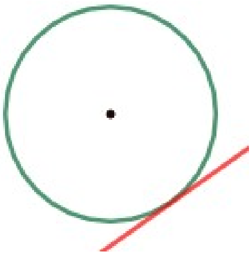
ചിത്രത്തിൽ ഒരു വരയും വൃത്തവും വരച്ചിരിക്കുന്നു .
ഇവ തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുകയോ പൊതുവായ ബിന്ദുക്കൾ
ഉണ്ടാവുകയോ ചെയ്യുന്നില്ല .



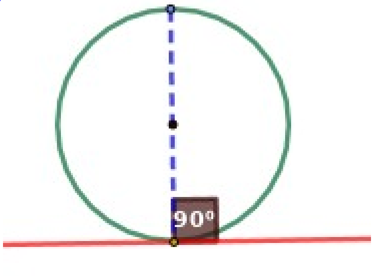
ചിത്രത്തിൽ ഒരു വരയും വൃത്തവും വരച്ചിരിക്കുന്നു .
ഈ വര,വൃത്തത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു .അതിനാൽ
ഇവയ്ക്ക് പൊതുവായി രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ട് .



ചിത്രത്തിൽ ഒരു വരയും വൃത്തവും വരച്ചിരിക്കുന്നു .
ഈ വര,വൃത്തത്തെ തൊട്ടുകൊണ്ട് പോകുന്നു .

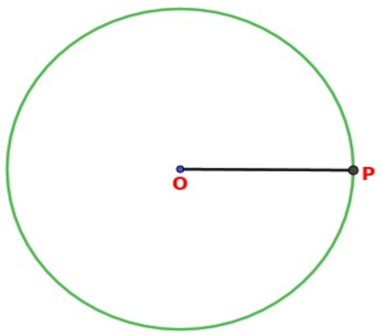


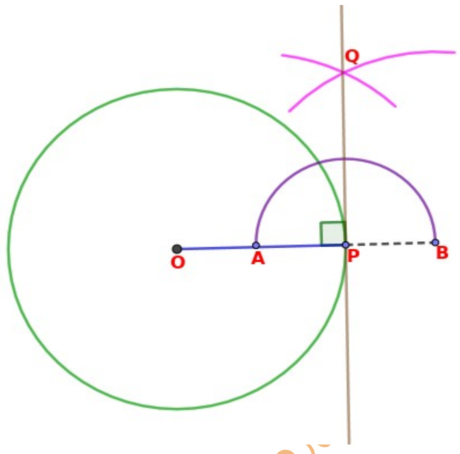
ഇത്തരത്തിൽ വൃത്തത്തെ തൊട്ടുകൊണ്ട് പോകുന്ന വരകളെയാണ്
തൊട്ടുവരകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നത്
ഒരു വൃത്തത്തിനും ഒരു തൊട്ടുവരയ്ക്കും പൊതുവായി ഒരേ ഒരു ബിന്ദു
മാത്രമേയുള്ളു .
വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള തൊട്ടുവര
വ്യാസത്തിനു ലംബമാണ് .



ഗവ.വി&എച്ച്.എസ്.എസ് കുളത്തൂർ പാറശ്ശാല

ഒരു വൃത്തം തന്നിരുന്നാൽ അതിനെങ്ങനെ ഒരു തൊടുവര വരയ്ക്കാം

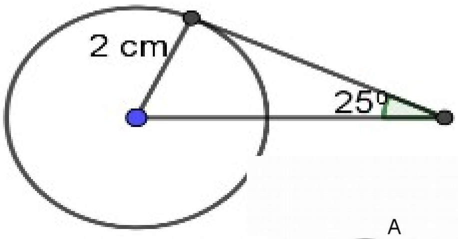




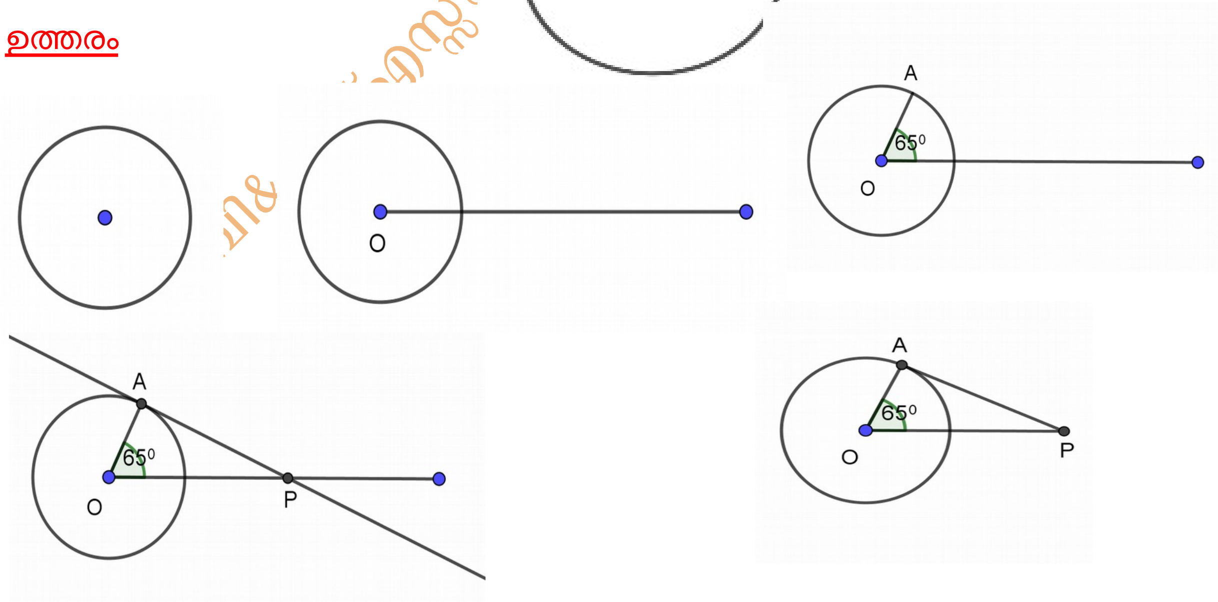
O കേന്ദ്രമായ വൃത്തം വരയ്ക്കുക . വൃത്തത്തിൽ **P** എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക . **P** എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ആരത്തിനു ലംബമായി ,ലംബം **PQ** വരയ്ക്കുക (ഇതു വരയ്ക്കുന്നതിനായി **OP** യെ **OB** ലോട്ട് നീട്ടി വരയ്ക്കുക .**P** കേന്ദ്രമായി **AP** ആരമായ ഒരർദ്ധവൃത്തം വരയ്ക്കുക .**AB** യുടെ ലംബ സമഭാജി **PQ** വരയ്ക്കുക).**PQ** എന്ന വര വൃത്തത്തിലെ **P** എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള തൊടുവരയാണ് .

പ്രവർത്തനം -1

ഈ ചിത്രം നോട്ട്ബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക



ഉത്തരം



2 സെ.മീ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക

ആരം വരയ്ക്കുക

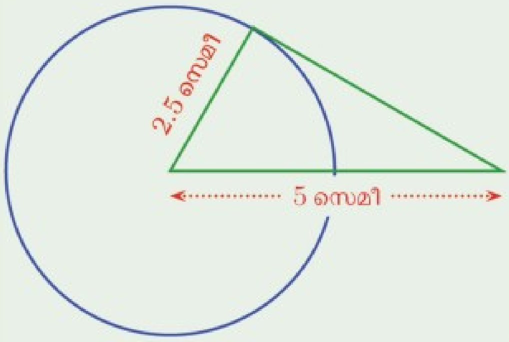
രണ്ട് ആരങ്ങൾക്കിടയിൽ $90^0 - 25^0 = 65^0$ കേന്ദ്രകോൺ ആകത്തക്ക വിധം മറ്റൊരാരം വരയ്ക്കുക.

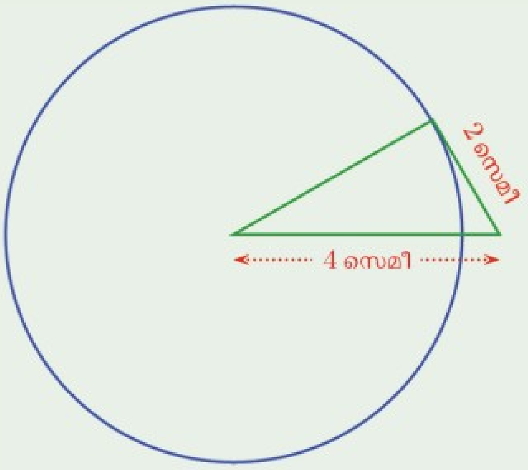
ആ ആരം വൃത്തത്തിനു പുറത്തേയ്ക്ക് നീട്ടി വരയ്ക്കുക. ചിത്രത്തിലേതു പോലെ തൊടുവര വരയ്ക്കുക .

മറ്റ് പ്രവർത്തനങ്ങൾ

പ്രവർത്തനം -2

ചുവടെയുള്ള രണ്ടു ചിത്രത്തിലും വൃത്തത്തിലെ ഒരു തൊടുവരയും, തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലേയ്ക്കുള്ള ആരവും കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള മറ്റൊരു വരയും ചേർത്ത് ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



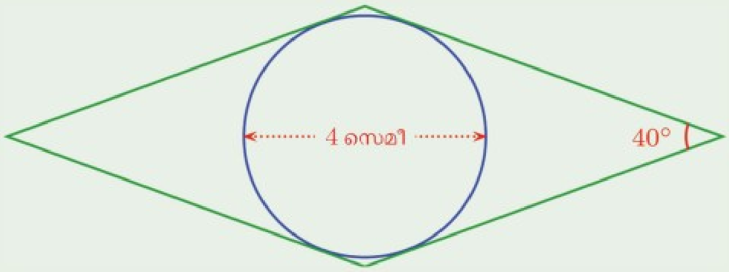


ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.

പ്രവർത്തനം -3

ചിത്രത്തിലെ സമഭുജ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാണ്.

ഈ ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.

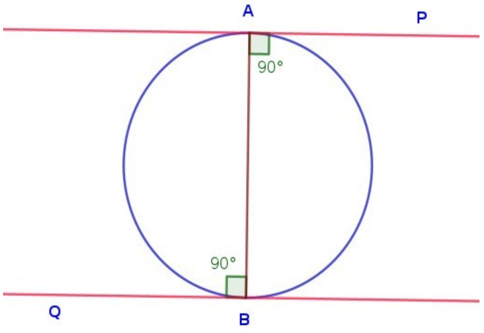


പ്രവർത്തനം -4

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ സമാന്തരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം

ചിത്രത്തിൽ **AB** വ്യാസമായ വൃത്തം വരച്ചിരിക്കുന്ന **.AP,BQ** വൃത്തത്തിലെ തൊട്ടുവരകളാണ് . നമുക്കറിയാം ,വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള തൊട്ടുവര വ്യാസത്തിനു ലംബമാണ് .



∟BAP = ∟ABQ = 90°

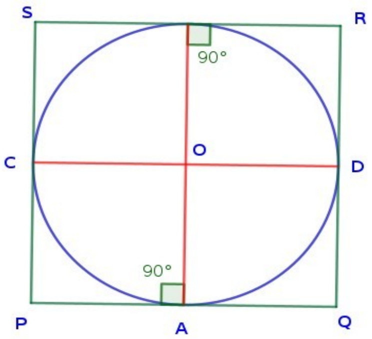
മറുകോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ **AP**

സമാന്തരമാണ് **BQ .**

പ്രവർത്തനം -5

ഒരു വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വ്യാസങ്ങളുടെ അറ്റങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്നത് ഏതുതരം ചതുർഭുജമാണ്?

ഉത്തരം



AB,CD ഇവ വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ട് വ്യാസങ്ങളാണ് .

AB എന്ന വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ട് അറ്റങ്ങളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന തൊട്ടുവരകളാണ് **PQ ,SR**

CD എന്ന വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ട് അറ്റങ്ങളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന തൊട്ടുവരകളാണ് **QR ,PS**

നമുക്കറിയാം ,ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ട് അറ്റങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമാന്തരമാണ് . **∴ PQ∥SR ,PS∥QR**

PQ = SR = PS = QR =വ്യാസം

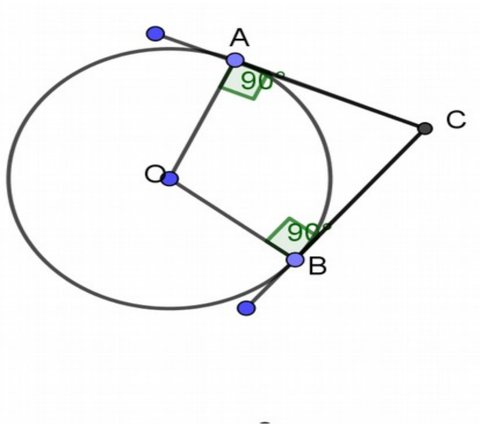
സമചതുരം **PAOC** യിൽ, **∟PAO = ∟PCO = ∟AOC = 90°**

∴∟P = 90°

ഇതുപോലെ **∟Q = ∟R = ∟S = 90°** എന്നും കിട്ടും .

അതിനാൽ **PQRS** ഒരു സമചതുരമാണ് .

തൊട്ടുവരകളും കോണുകളും



ചിത്രത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ **A,B** ലൂടെയുള്ള തൊട്ടുവരകൾ **C** എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.

അതിനാൽ ∟A = ∟B = 90°

ഇനി **OACB** എന്ന ചതുർഭുജം പരിഗണിച്ചാൽ

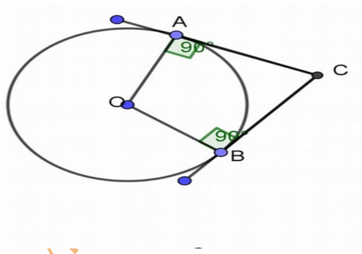
∟A + ∟B = 180° . അതായത് ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർമൂലയിലെ കോണുകളുടെ തുക **180°**

ആയതിനാൽ **OACB** എന്ന ചതുർഭുജം ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജമാണ് .

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, അതിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും, ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും മൂലകളായ ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണ്.

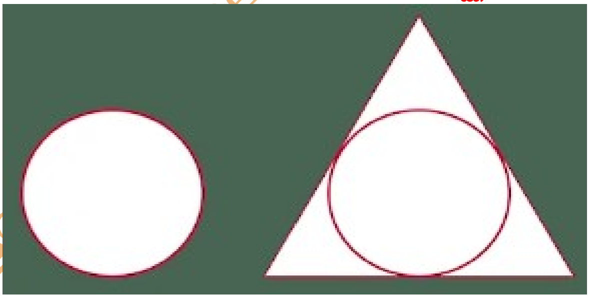
ചിത്രത്തിൽ നിന്നും,

$\angle AOB + \angle ACB = 180°$ എന്നും നമുക്ക് കിട്ടും . അതായത്



ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണും, ഈ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന കോണും അനുപൂരകമാണ്.

ഒരു വൃത്തത്തെ കൃത്യമായി പൊതിഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കണം . എങ്ങനെ**?**



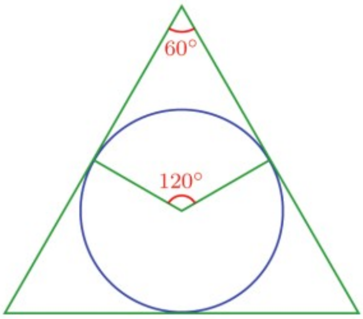
ഇവിടെ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ തൊട്ടുവരകളാണ് . സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ കോണും **60°** വീതമാണ് .അതിനാൽ തൊട്ടുവരകൾ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങൾ കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ = **$180^0 - 60^0 = 120^0$** ആയിരിക്കും .

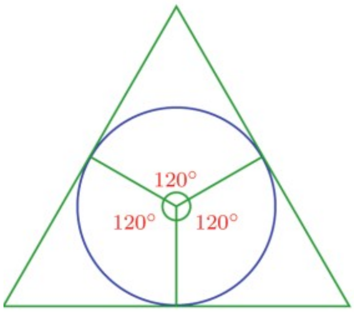
<u>വരയ്ക്കുന്ന രീതി</u>

1) ആദ്യം തന്നിട്ടുള്ള ആരത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കുക

2) വൃത്ത കേന്ദ്രത്തിൽ പരസ്പരം **120^0** കോൺ വരത്തക്ക വിധം **3** ആരങ്ങൾ വരയ്ക്കണം.

3) ഈ ആരങ്ങളുടെ അറ്റങ്ങളിലൂടെ തൊട്ടുവരകൾ വരയ്ക്കുക .



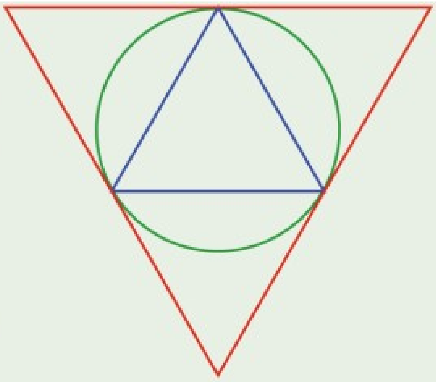


<u>മറ്റ് പ്രവർത്തനങ്ങൾ</u> **(6)**

ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വശങ്ങളെല്ലാം ഈ വൃത്തത്തെ തൊടുന്നതും കോണുകൾ 40°, 60°, 80° യും ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

പ്രവർത്തനം -7

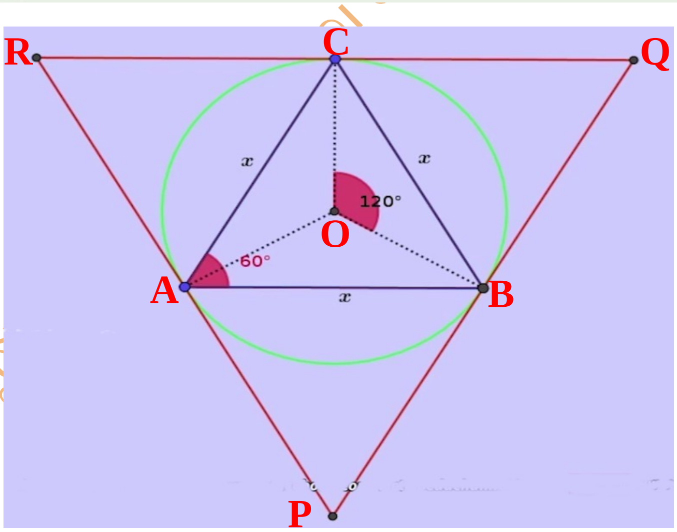
തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ (നീല) ത്രികോണം സമഭുജമാണ്. അതിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളാണ് വലിയ (ചുവന്ന) ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ.



i) വലിയ ത്രികോണം സമഭുജമാണെന്നും, അതിന്റെ വശങ്ങൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

ii) ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ ആയി ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.

ഉത്തരം



(i) ചിത്രത്തിൽ **ΔABC** ഒരു സമഭുജ ത്രികോണമാണ് .

∟BAC = ∟ABC = ∟ACB = 60°

∴ ∟BOC = ∟AOC = ∟AOB

= 2 × 60° = 120°

PAOB, QBOC, RAOC ഇവ ചക്രീയ ചതുർഭുജങ്ങളാണ്.

∴ ∟P = ∟Q = ∟R = 180° – 120°

= 60°

ΔPQR ഒരു സമഭുജത്രികോണമാണ് .

ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം = **x** എന്നിരിക്കട്ടെ

∟A = ∟Q = 60°,

∟B = ∟R = 60°,

∟P = ∟C = 60° അതിനാൽ

ABQC, ABCR, PBCA ഇവ സമഭുജസാമാന്തരികങ്ങളാണ് .

PB = BQ = QC = CR = RA = AP = x

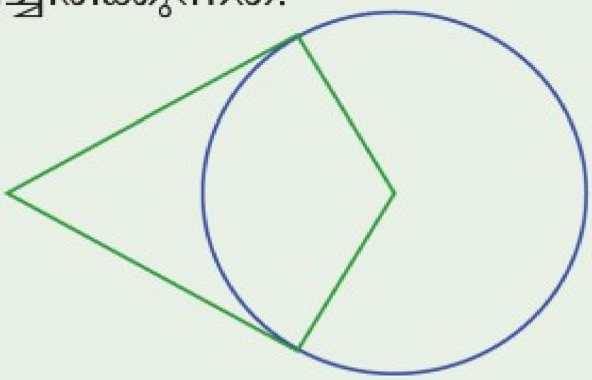
∴ PQ = 2x, QR = 2x, PR = 2x

ഇതിൽ നിന്നും വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ രണ്ട് മടങ്ങാണെന്ന് കിട്ടും .

(ii) ചിത്രം വരയ്ക്കുക

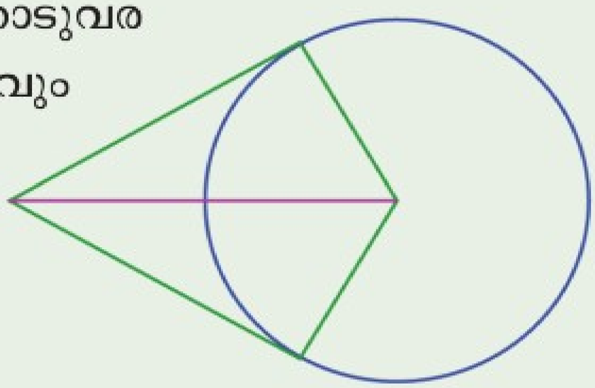
കൂടുതൽ പ്രവർത്തനം

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു തൊടുവരകളും, തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങളുമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



i) തൊടുവരകളുടെ നീളം തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

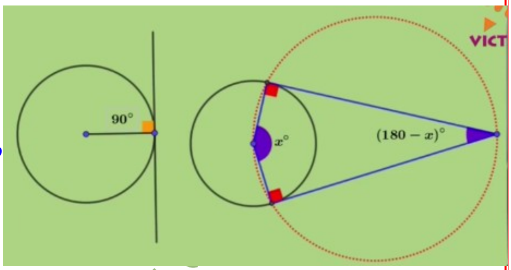
ii) വൃത്തകേന്ദ്രവും, തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ആരങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



ഗവ.വി

07 – 12 - 2020 ലെ ഓൺലൈൻ ക്ലാസ് ⇨ ക്ലിക്ക്

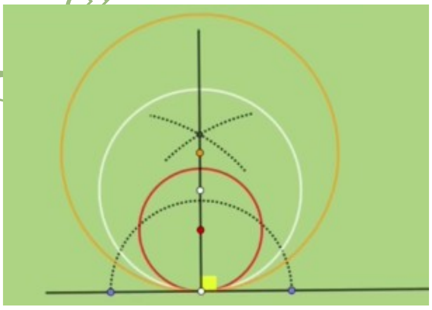
<u>കഴിഞ്ഞ ക്ലാസിൽ ചർച്ച ചെയ്തത്</u>



1) വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ ഉള്ള തൊടുവര ,ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ആരത്തിനു ലംബമാണ്

2) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ,അതിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളും , ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും മൂലകളായ ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണ് .

ഒരു വരയെ തൊടുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?



1) ആദ്യം ഒരു വര വരയ്ക്കുക

2) വരയിലൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക

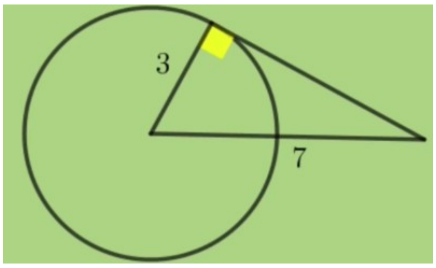
3) ഈ ബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കൊരു ലംബം വരയ്ക്കുക

4) ലംബമായ വരയിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി ഇതിൽ നിന്ന് ആദ്യ ബിന്ദു വരെയുള്ള അകലത്തെ ആരമാക്കി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക .

ആദ്യ വര ഈ വൃത്തത്തിനു തൊടുവരയായിരിക്കും .

ഇതുപോലെ നമുക്ക് അനേകം വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം . അതായത് നമുക്ക് ഒരു വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിനെ തൊടുന്ന അനേകം വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ കഴിയും .എന്നാൽ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ ഒരു തൊടുവര മാത്രമേ വരയ്ക്കാൻ കഴിയുകയുള്ളൂ .

<u>പ്രവർത്തനം</u>



ഈ ചിത്രം തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളോട് കൂടി നോട്ട് ബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക

<u>ഉത്തരം</u>

ചിത്രത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ള ത്രികോണം ഒരു മട്ടത്രികോണമാണ് ഇതിൽ കർണ്ണം **7** സെ.മീ ഒരു ലംബവശം **3** സെ.മീ

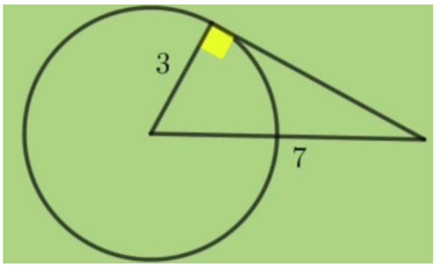
1) ആദ്യം **3** സെ.മീ നീളമുള്ള ഒരു വര വരയ്ക്കണം .

2) ഈവരയുടെ ഒരറ്റത്ത് ലംബം വരയ്ക്കുക

3) ഈ വരയുടെ മറ്റേ അറ്റത്ത് നിന്ന് **7** സെ.മീ ആരത്തിൽ ഒരു ചാപം ലംബത്തിലേയ്ക്കു വരയ്ക്കുക

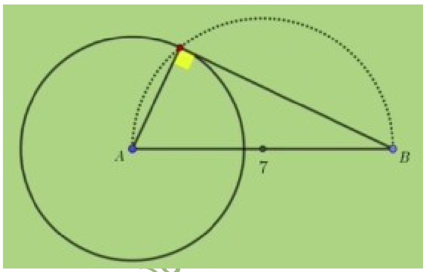
4) ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക .ഇനി ആദ്യം വരച്ച **3** സെ.മീ നീളമുള്ള വരയുടെ ഒരറ്റം വൃത്തകേന്ദ്രമായും മറ്റേ അറ്റത്തുകൂടി കടന്നുപോകുന്നതുമായ വൃത്തം വരയ്ക്കുക

പ്രവർത്തനം



3 സെ.മീ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക .അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് **7** സെ.മീ അകലത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക .ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിലേയ്ക്ക് തൊടുവര വരയ്ക്കുക .

ഉത്തരം



1) ആദ്യം **3** സെ.മീ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക

2) കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് **7** സെ.മീ അകലത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക .

3) വൃത്തകേന്ദ്രവും ഈ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ചൊരു വര വരയ്ക്കുക

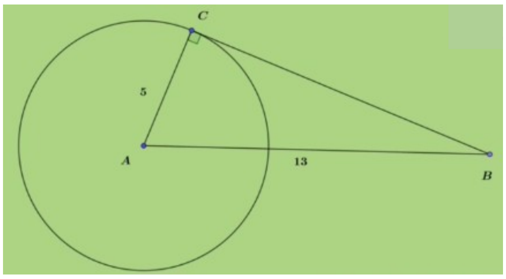
4) വ്യാസം **7** സെ.മീ ആകത്തക്കവിധം ഒരർദ്ധവൃത്തം വരയ്ക്കുക

5) അർദ്ധവൃത്തവും വൃത്തവും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ച് ഒരു വര വരയ്ക്കുക . ഈ വര വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരയായിരിക്കും .

പ്രവർത്തനം

5 സെ.മീ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന് അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും **13** സെ.മീ അകലെയുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും തൊടുവര വരച്ചിരിക്കുന്നു .ഈ തൊടുവരയുടെ നീളം എന്തായിരിക്കും ?

ഉത്തരം



ഇതിനായി ആദ്യം ഒരു ഏകദേശ ചിത്രം വരയ്ക്കണം .

$\angle C = 90^0$ അതിനാൽ

$\triangle ABC$ ഒരു മട്ടത്രികോണമാണ് .

പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് ,

$BC^2 = AB^2 - AC^2$

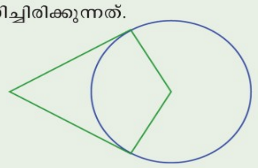
$= 13^2 - 5^2$

$BC = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

തൊടുവരയുടെ നീളം =**12** സെ.മീ

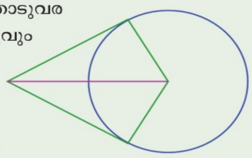
പ്രവർത്തനം

(3) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു തൊടുവരകളും, തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങളുമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

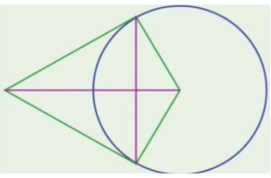


i) തൊടുവരകളുടെ നീളം തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

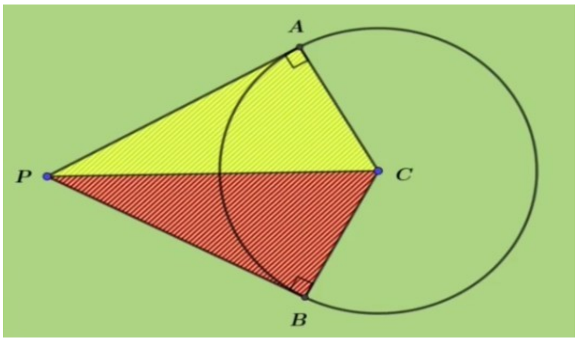
ii) വൃത്തകേന്ദ്രവും, തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ആരങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



iii) തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാണിന്റെ ലംബസമഭാജിയാണ് ഈ വര എന്ന് തെളിയിക്കുക.



ഉത്തരം



i) ചിത്രത്തിൽ **C** വൃത്തകേന്ദ്രവും തൊടുവരകൾ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് **A, B .** തൊടുവരകൾ തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവാണ് **P.** **PC** യോജിപ്പിക്കുക

$\angle A = \angle B = 90°$

ΔPAC , ΔPBC ഇവ മട്ടത്രികോണങ്ങളാണ് .

AC = BC (ഒരേ വൃത്തത്തിലെ ആരങ്ങൾ)

PC = PC (പൊതുവായവശം)

ΔPAC , ΔPBC ഇവ തുല്യത്രികോണങ്ങളാണ് .

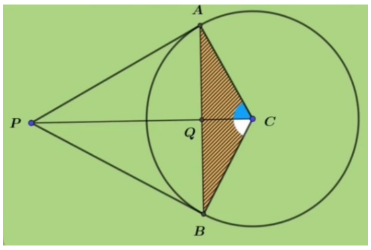
∴ **PA = PB**

(ii) ΔPAC , ΔPBC ഇവ തുല്യത്രികോണങ്ങളാണ് . അതിനാൽ തുല്യ വശങ്ങൾക്കെതിരെ വരുന്ന കോണുകൾ തുല്യമായിരിക്കും .

$\angle APC = \angle BPC$

$\angle ACP = \angle BCP$

∴ $\angle ACB$, $\angle APB$ യുടെ സമഭാജിയാണ് **PC**



(iii) ΔAQC , ΔBQC ഇവ പരിഗണിക്കുക

$\angle ACQ = \angle BCQ$ (**PC** എന്ന വര ആരങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണുകളുടെ സമഭാജിയാണ്)

AC=BC (ഒരേ വൃത്തത്തിലെ ആരങ്ങൾ)

$\angle QAC = \angle QBC$ (ΔAQC , ΔBQC സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ)

ഇതിൽ നിന്നും ΔAQC , ΔBQC ഇവ തുല്യത്രികോണങ്ങളാണ് .

∴ **AQ = BQ**

അതായത് **AB** എന്ന ഞാണിന്റെ സമഭാജിയാണ് **PC.**

$\angle AQC = \angle BQC$ (തുല്യ വശങ്ങൾക്കെതിരെ വരുന്ന കോണുകൾ തുല്യമായിരിക്കും)

$\angle AQC + \angle BQC = 180°$ (രേഖീയ ജോഡികൾ)

ഇതിൽ നിന്നും $\angle AQC = \angle BQC = 90^0$

അതിനാൽ **AB** എന്ന ഞാണിന്റെ ലംബ സമഭാജിയാണ് **PC.**

പ്രവർത്തനം

O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിലെ **P** എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള തൊടുവരയും **OP** എന്ന ആരവും **O** യിൽ നിന്ന് **A** യെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന മറ്റൊരു വരയുമുണ്ട് .

(a) ഏകദേശ ചിത്രം വരയ്ക്കുക

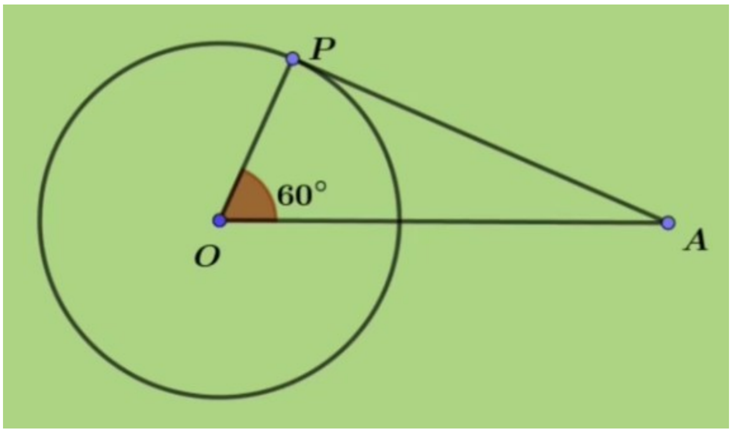
(b) $\angle POA = 60°$ ആയാൽ ത്രികോണം **OAP** യുടെ മറ്റ് രണ്ട് കോണുകളും എത്ര വീതമാണ്

(c) വൃത്തത്തിന്റെ ആരം **10** സെ.മീ ആയാൽ തൊടുവരയുടെ നീളമെത്ര**?**

(d) OA എന്ന വരയുടെ നീളമെത്ര**?**

ഉത്തരം

(a)



(b) ∟P = 90°

∟A = 90°- 60° = 30°

(c) ΔAOP യുടെ കോണളവുകൾ 30°, 60°, 90° ആയതിനാൽ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 1:√3:2

ആരം = 10 സെ .മീ

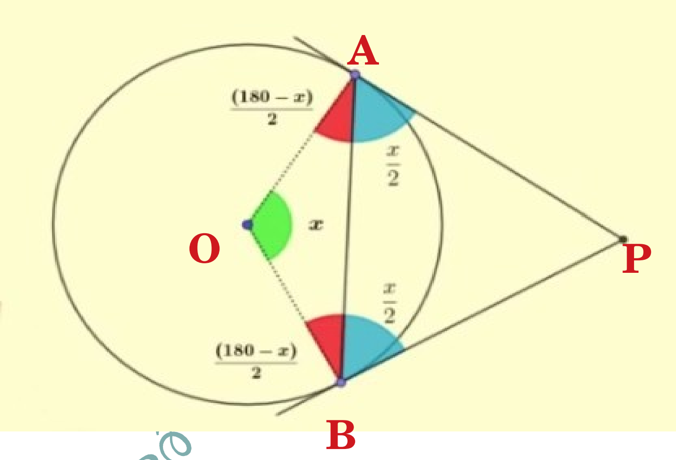
തൊട്ടുവരയുടെ നീളം = 10√3 സെ .മീ

(d) OA യുടെ നീളം = 20 സെ .മീ

ഗവ.വി&എച്ച്എസ്എസ് കുളത്തൂർ പാറശ്ശാല നെയ്യാറ്റിൻകര

08 – 12 - 2020 ലെ ഓൺലൈൻ ക്ലാസ് ⇨ ക്ലിക്ക്

ഞാണും തൊട്ടുവരയും



ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിൽ
OA, OB ആരങ്ങൾ
PA, PB തൊട്ടുവരകളും **AB**
ഞാണുമാണ് .

ആരങ്ങൾക്കിടയിലെ കോൺ = x°
അതായത് $\angle AOB = x^\circ$

$OA = OB$ (ആരങ്ങൾ)
ΔAOB ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണമാണ്

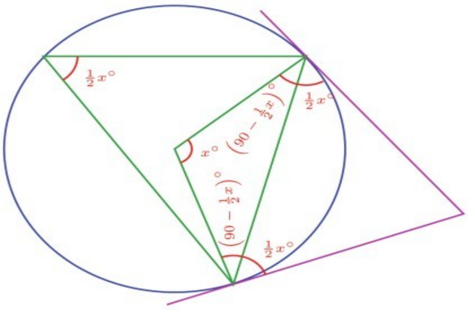
$\angle OAB = \angle OBA = \frac{180^0 - x^0}{2}$

$\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ (തൊട്ടുവരയും തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ആരവും പരസ്പരം ലംബങ്ങളാണ്)

$\angle PAB$, $\angle PBA$ ഇവ തൊട്ടുവരയും ഞാണും തമ്മിലുള്ള കോൺ

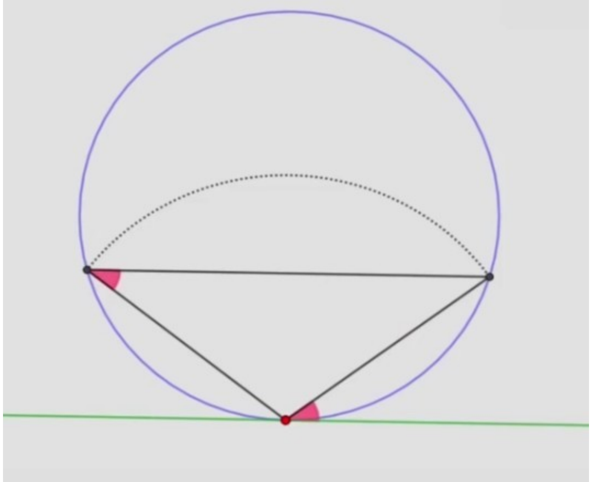
$\angle PAB = \angle PBA = 90^0 - \frac{180^0 - x^0}{2} = 90^0 - [90^0 - \frac{x}{2}] = \frac{x}{2}$

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ ഞാണുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണ്.



വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാൺ അതിന്റെ അറ്റത്തുള്ള തൊടുവരയുമായി ഒരു വശത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, മറുവശത്തുള്ള വൃത്തഭാഗത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിനു തുല്യമാണ്.

വൃത്തകേന്ദ്രം അറിയാത്ത വൃത്തത്തിന് തൊട്ടുവര വരയ്ക്കുന്ന വിധം



1. വൃത്തം വരയ്ക്കുക

2.വൃത്തത്തിലൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക

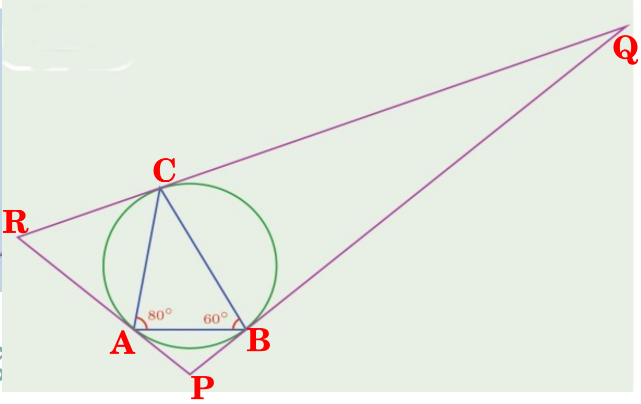
3.ബിന്ദുവിന്റെ ഇരുഭാഗങ്ങളിലുമായി വൃത്തത്തിൽ രണ്ട് തുല്യ ഞാണുകൾ വരയ്ക്കുക .

4.ഈ തുല്യ ഞാണുകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു ഞാൺ വരയ്ക്കുക

5.ഈ ഞാണിനു സമാന്തരമായി ബിന്ദുവിലൂടെ ഒരു വര വരയ്ക്കുക . ഈ വര വൃത്തത്തിന്റെ തൊട്ടുവരയായിരിക്കും .

പ്രവർത്തനം

ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളാണ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ. വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.



ഉത്തരം

നമുക്കറിയാം വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാൺ അതിന്റെ അറ്റത്തുള്ള തൊടുവരയുമായി ഒരു വശത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ , മറുവശത്തുള്ള വൃത്തഭാഗത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിനു തുല്യമാണ് .

∟QBC = ∟QCB = 80°

∟Q = 180 – (80° + 80°) = 180 – 160° = 20°

∟RAC = ∟RCA = 60°

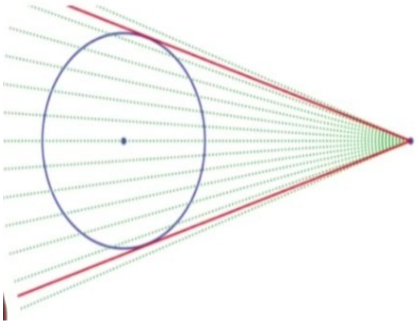
∟R = 180 – (60° + 60°) = 180 – 120° = 60°

∟P = 180 – (20° + 60°)

= 180 – 80° = 100°

വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ 20^0 , 60^0 , 100^0 .

പുറത്തുനിന്നും തൊടുവര

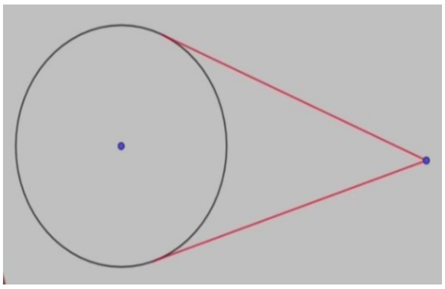


ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിലേയ്ക്ക് അനേകം വരകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു .ഇതിൽ ചിലത് വൃത്തത്തെ തൊടാത്തവയും, ചിലത് വൃത്തത്തെ തൊടുന്നവയും,ചിലത് വൃത്തത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്നവയുമാണ് .

ചിത്രത്തിൽ ബാഹ്യ ബിന്ദുവിൽ നിന്നു വരച്ചിരിക്കുന്ന വരകളിൽ രണ്ടെണ്ണം മാത്രമാണ് വൃത്തത്തെ തൊട്ടുകൊണ്ട് പോകുന്നത് .

ഇതിൽ നിന്നും ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്നും രണ്ട് തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കാം എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം .

വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും തൊടുവരകൾ എങ്ങനെ വരയ്ക്കാം



1) തന്നിട്ടുള്ള ആരത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കുക

2) വൃത്തത്തിനു പുറത്ത് ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക

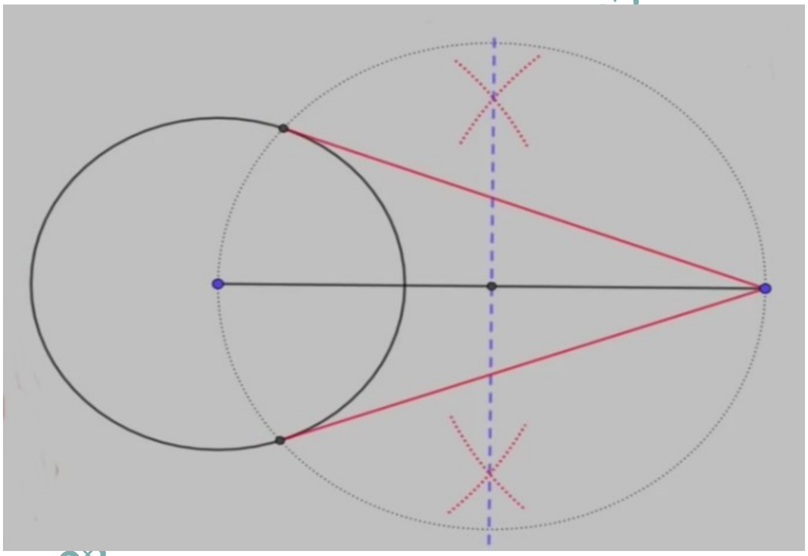
3) ഈ ബിന്ദുവിനെ വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ച് വരയ്ക്കുക

4) ഈ വരയ്ക്ക് ലംബസമഭാജി വരച്ച് വരയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു കണ്ടെത്തുക

5) ഈ മദ്ധ്യബിന്ദു കേന്ദ്രമാക്കി വര വ്യാസമാക്കി മറ്റൊരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക

6) വൃത്തങ്ങൾ പരസ്പരം കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളെ ആദ്യം വൃത്തത്തിനു പുറത്തു വരച്ച ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുക

ഈ വരകൾ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാണ് .

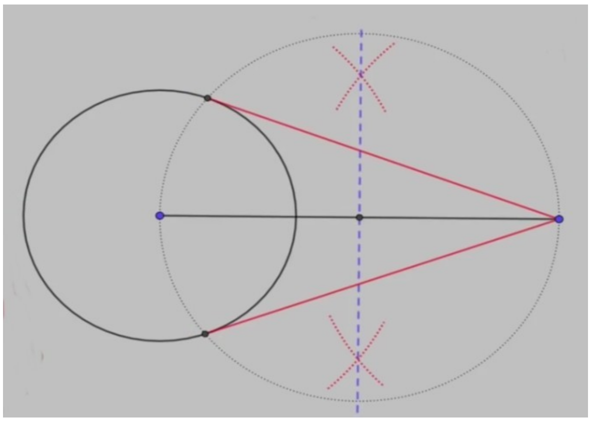


പ്രവർത്തനം

2 സെ.മീ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക .വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും **7** സെ.മീ അകലെ **P** എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക .**P** യിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേയ്ക്ക് തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കുക .

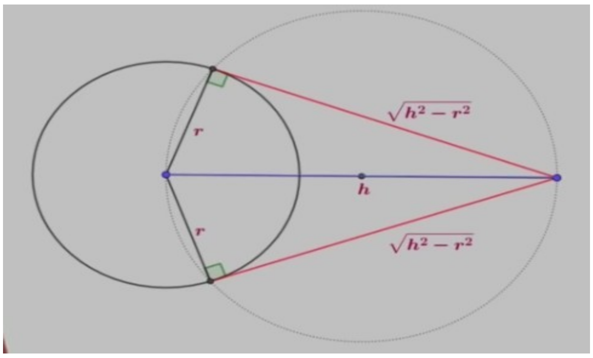
ഉത്തരം

തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അനുസരിച്ച് ചിത്രം സ്വയം വരയ്ക്കുക .

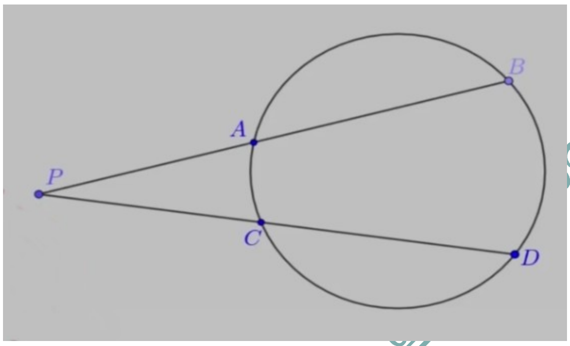


നോട്ട് :1

ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.

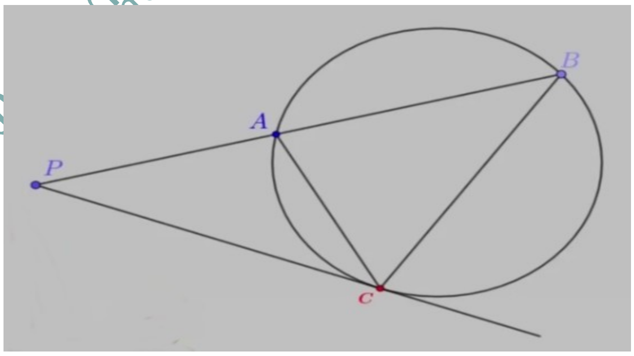


നോട്ട് :2



ചിത്രത്തിൽ വൃത്തത്തിലെ **AB , CD** എന്നീ രണ്ട് ഞാണുകൾ നീട്ടി വരച്ച് **P** എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു എങ്കിൽ **PA × PB = PC × PD** ആയിരിക്കും .

ചിത്രത്തിൽ **C,D** പരസ്പരം അടുത്തേയ്ക്ക് നീങ്ങി ഒരു ബിന്ദുവായി മാറിയാൽ ഈ ചിത്രം പോലെയാകും



ΔPAC , ΔPCB പരിഗണിക്കുക

∟P രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾക്കും പൊതുവായ കോണാണ്

∟PCA = ∟PBC (തൊടുവരയും ഞാണും തമ്മിലുള്ള കോൺ ഞാണിന്റെ മറുഭാഗത്തെ വൃത്ത ഖണ്ഡത്തിലെ കോണിനു തുല്യമാണ്)

∟PAC = ∟PCB (ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക 180^0)

ΔPAC , ΔPCB യുടെ കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണ് .

∴ ΔPAC , ΔPCB ഇവ സദൃശത്രികോണങ്ങളാണ് .

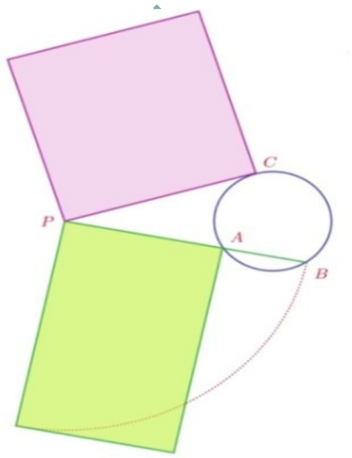
അതിനാൽ തുല്യ കോണുകൾക്കെതിരെ വരുന്ന വശങ്ങൾ ആനുപാതികമായിരിക്കും .

അതായത് $\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$

∴ PA×PB = PC×PC

PA×PB = PC^2

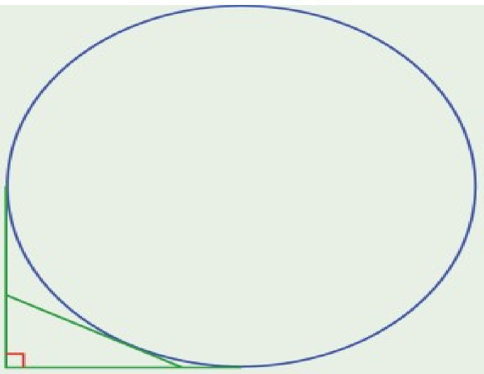
മുറിക്കുന്ന വരയുടെയും വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഭാഗത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം, തൊടുവരയുടെ വർഗത്തിനു തുല്യമാണ്.



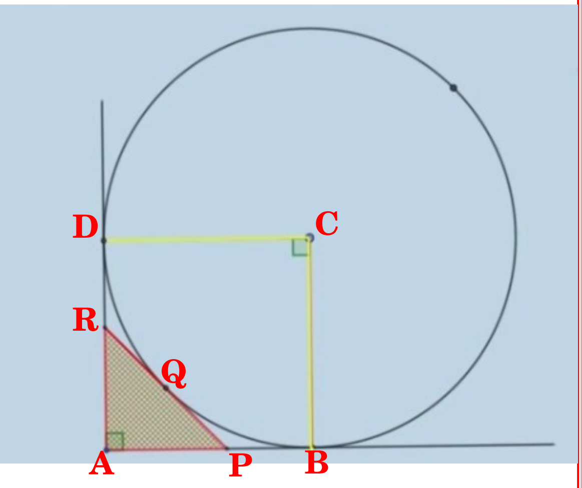
മുറിക്കുന്ന വരയും വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തുള്ള ഭാഗവും വശങ്ങളായ ചതുരത്തിനും , തൊട്ടുവര വശമായ സമചതുരത്തിനും ഒരേ പരപ്പളവാണ് .

പ്രവർത്തനം

ഒരു വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു തൊടുവരകളും, മറ്റൊരു തൊടുവരയും ചേർന്ന് ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കിയ ചിത്രം നോക്കൂ.
ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



ഉത്തരം



AB,AD വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ലംബങ്ങളായ രണ്ട് തൊട്ടുവരകളാണ് .

PR എന്ന തൊട്ടുവര വൃത്തത്തെ **Q** എന്ന ബിന്ദുവിൽ തൊടുന്നു.

∟ADC = ∟ABC = 90°

∟A = 90°

∴∟C = 90°

BC = DC(ഒരേ വൃത്തത്തിലെ ആരങ്ങൾ)

ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകളെല്ലാം 90^0 ആണ് .കൂടാതെ രണ്ട് ജോഡി സമീപവശങ്ങൾ തുല്യവുമാണ് . അതിനാൽ **ABCD** ഒരു സമചതുരമാണ് .

AB = BC = CD = AD = വൃത്തത്തിന്റെ ആരം

കൂടാതെ**PB = PQ, RD= RQ**

AD = AR + RD

AD= AR + RQ .... ①

AB = AP + PB

AB= AP + PQ .... ②

സമവാക്യങ്ങളുടെ ഇരുവശങ്ങളുടെയും തുക എടുത്താൽ ,

AD + AB = AR + RQ + AP + PQ

= AR + AP + PQ + RQ

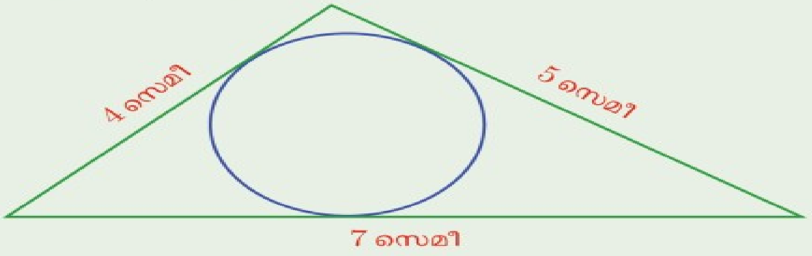
= AR + AP + PR = ΔAPR ന്റെ ചുറ്റളവ് .

AD + AB = ആരം **+** ആരം **=** വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം

∴ ΔAPR ന്റെ ചുറ്റളവ് വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന് തുല്യമാണ് .

<u>പ്രവർത്തനം</u>

ഒരു വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു തൊടുവരകൾ ചേർന്ന ത്രികോണമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നത്.



ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നും തൊടുന്ന ബിന്ദു വരെയുള്ള തൊടുവരകളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

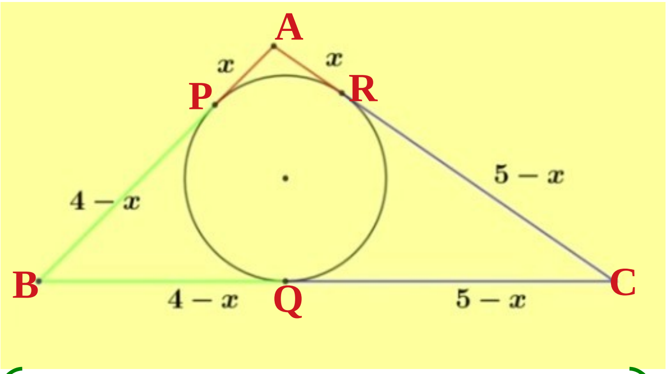
<u>ഉത്തരം</u>

ΔABC യിൽ

AB = 4 സെ.മീ**, BC = 7** സെ.മീ

AC = 5 സെ.മീ

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാണ് .**P,Q,R** ഇവ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് .



AP = x എന്നിരിക്കട്ടെ

AP = AR = x

BP = BQ = 4 – x, CR = CQ = 5 – x

BC = 7 cm

ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേയ്ക്ക് വരക്കുന്ന തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്

4 – x + 5 – x = 7

$9 - 2x = 7$

$2x = 9 - 7 = 2$

$\therefore\ x = 1$

BP = 4 – 1 = 3 സെ.മീ

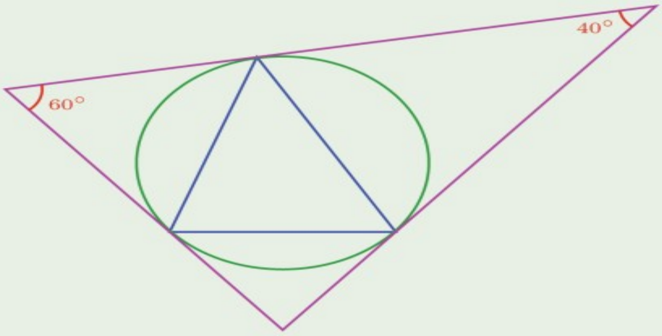
CR = 5 – 1 = 4 സെ.മീ

കൂടുതൽ പ്രവർത്തനം

1)

ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളാണ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ.

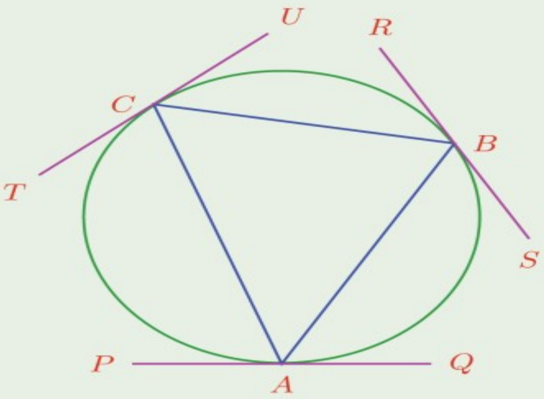
ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.



2)

ചിത്രത്തിൽ, *ABC* എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരച്ച തൊടുവരകളാണ് *PQ, RS, TU* എന്നീ വരകൾ.

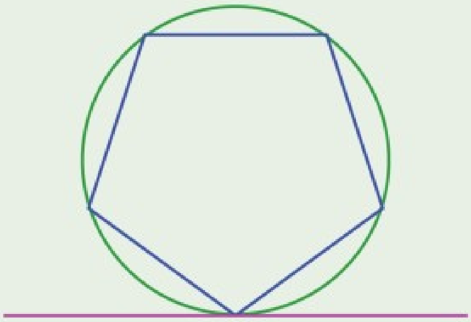
ചിത്രത്തിലെ തുല്യമായ കോണുകൾ തരംതിരിച്ച് എഴുതുക.



3)

ചിത്രത്തിൽ സമപഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽക്കൂടി അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന് തൊടുവര വരച്ചിരിക്കുന്നു.

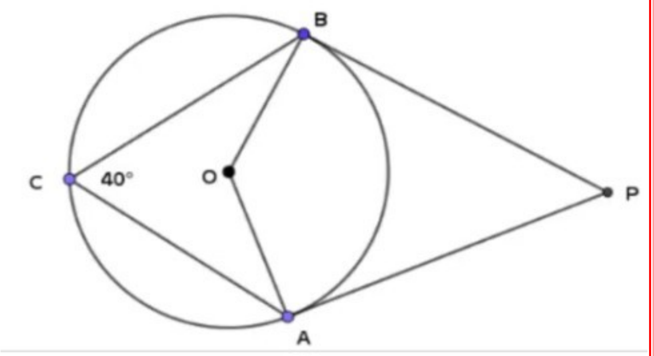
തൊടുവരയും, തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളും തമ്മിലുള്ള കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.



09 – 12 - 2020 ലെ ഓൺലൈൻ ക്ലാസ് ⇨ ക്ലിക്ക്

<u>പ്രവർത്തനം</u>

ചിത്രത്തിൽ **O** വൃത്തകേന്ദ്രവും **A,B,C** എന്നിവ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുമാണ് . കൂടാതെ **PA ,PB** തൊടുവരകളുമാണ് .



a) $\angle AOB$ യുടെ അളവ് എത്ര?

b) ത്രികോണം **APB** യുടെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക

<u>ഉത്തരം</u>

a) $\angle C = 40°$

$\angle AOB = 2 \times \angle C = 2 \times 40° = 80°$

b) AB യോജിപ്പിക്കുക

OAPB ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജമാണ് .

$\angle P = 180 - 80° = 100°$

PA=PB (ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേയ്ക്ക് വരക്കുന്ന തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്)

ΔAPB സമപാർശ്വത്രികോണമാണ്

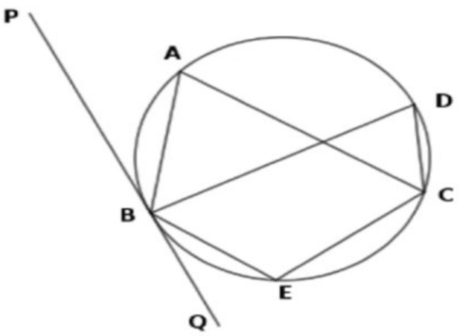
$$\angle PAB = \angle PBA = \frac{180 - 100}{2} = \frac{80}{2} = 40°$$

ΔAPB യുടെ കോണുകൾ **40°, 40°, 100°**

<u>പ്രവർത്തനം</u>

ചിത്രത്തിൽ A,B,C,D,E വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണ്. BD വ്യാസവും PQ B യിലൂടെയുള്ള തൊടുവരയുമാണ്. $\angle BDC = 50^0$, $\angle PBA = 70^0$ എങ്കിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള കോണുകളുടെ അളവുകൾ കണക്കാക്കുക.

$\angle BCD$, $\angle BAC$, $\angle BEC$, $\angle ACB$, $\angle QBC$



<u>ഉത്തരം</u>

BC യോജിപ്പിക്കുക

∟BCD = 90° (അർദ്ധവൃത്തത്തിലെ കോൺ)

∟BAC =∟BDC= 50°(ഒരേ ചാപത്തിലെ കോൺ)

∟BEC = 180 – 50° = 130° (BECD ചക്രീയചതുർഭുജമാണ്)

∟PBA = 70°

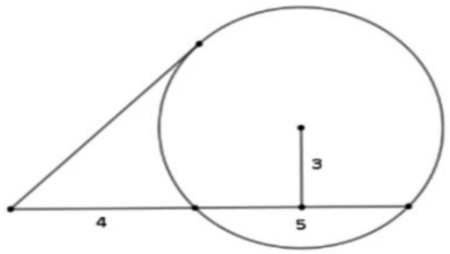
∟ACB = ∟PBA = 70°

∟QBC = ∟BAC = 50°

(തൊടുവരയും ഞാണും തമ്മിലുള്ള കോൺ ഞാണിന്റെ മറുഭാഗത്തെ വൃത്ത ഖണ്ഡത്തിലെ കോണിനു തുല്യമാണ്)

പ്രവർത്തനം

ഈ ചിത്രം തന്നിരിക്കുന്ന അളവിൽ വരയ്ക്കുക



ഉത്തരം

1) 5 സെ.മീ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരയ്ക്കുക (ഈ വര വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണാണ്)

2)ഈ വരയ്ക്ക് ഒരു ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കുക

3)വരയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽ നിന്ന് 3 സെ.മീ ഉയരത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക

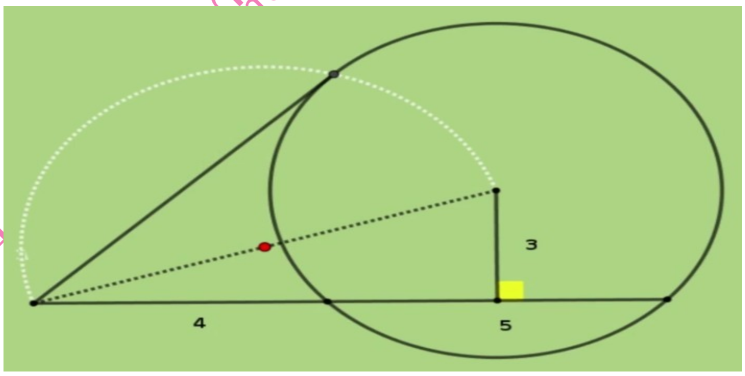
4)ഈ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ആദ്യത്തെ വരയുടെ അറ്റങ്ങളിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക

5)വൃത്തത്തിലെ ഞാൺ 4 സെ.മീ കൂടി നീട്ടി വരയ്ക്കുക

6)പുറത്തുള്ള ബിന്ദുവിനെ വൃത്ത കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുക

7)ആ പുതിയ വര വ്യാസമായി ഒരർദ്ധവൃത്തം വരയ്ക്കുക

8)അർദ്ധവൃത്തവും വൃത്തവും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ തൊടുവര വരയ്ക്കുക



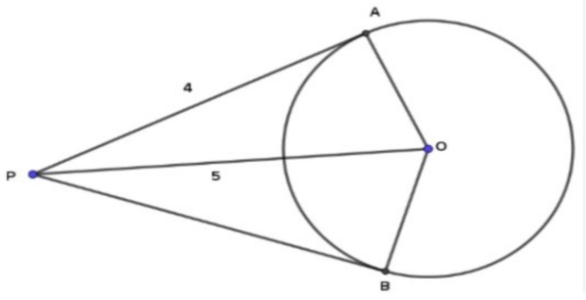
പ്രവർത്തനം

ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രവും

PA, PB എന്നിവ തൊടുവരകളുമാണ്.

PA = 4cm, OP = 5cm. ചതുർഭുജം

PAOB യുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക



ഉത്തരം

ചിത്രത്തിൽ **OA, OB** ആരങ്ങളാണ്

PA,PB തൊട്ടുവരകളാണ് .

PA = PB = 4 സെ.മീ

∟A = ∟B = 90° (തൊട്ടുവരയും തൊടുന്ന ബിന്ദു ഉൾപ്പെടുന്ന ആരവും പരസ്പരം ലംബങ്ങളാണ് .

ΔPAO, ΔPBO മട്ടത്രികോണങ്ങളാണ്

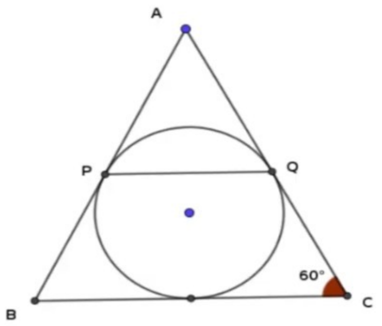
OA = $\sqrt{5^2-4^2}$ = $\sqrt{25-16}$ = $\sqrt{9}$ **= 3** സെ.മീ

ΔPAO യുടെ പരപ്പളവ് = $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ ച.സെ.മീ

ചതുർഭുജം **PAOB** യുടെ പരപ്പളവ് = **2 × 6=12** ച.സെ.മീ

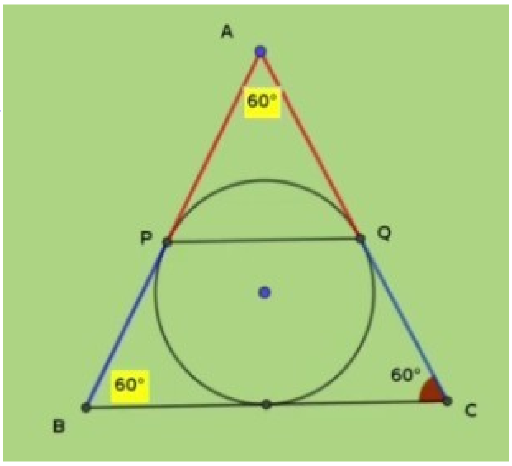
പ്രവർത്തനം

ചിത്രത്തിൽ ത്രികോണം ABC യുടെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ തൊട്ടുവരകളാണ്. AB യ്ക്ക് സമാന്തരമാണ് PQ, <C=60°. ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.



ഉത്തരം

ചിത്രത്തിൽ **AP=AQ** (ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേയ്ക്ക് വരക്കുന്ന തൊട്ടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്)



PQ സമാന്തരമാണ് **BC**

AP:PB = AQ:QC

∴ PB = QC

AP+ PB = AQ+QC

∴ AB = AC

ΔABC ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണമാണ്

∟C = ∟B = 60°

∟A = 180 – (60° + 60°)

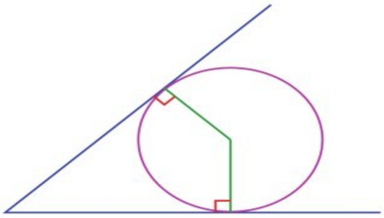
= 180 - 120° = 60°

ΔABC ഒരു സമഭുജത്രികോണമാണ് .

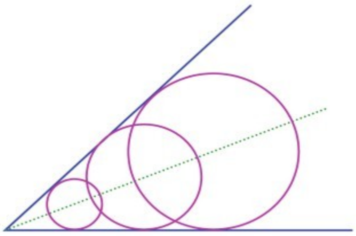
11 – 12 - 2020 ലെ ഓൺലൈൻ ക്ലാസ് ⟹ ക്ലിക്ക്

<u>വരയെ തൊടുന്ന വട്ടം</u>

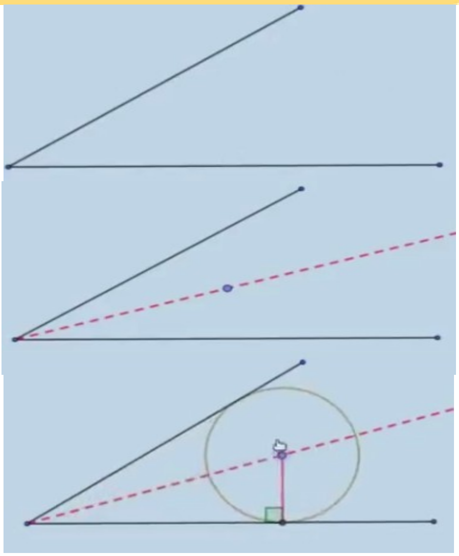
<u>രണ്ട് കൂട്ടിമുട്ടുന്ന വരകളെ ഒരു പോലെ തൊടുന്ന വൃത്തം എങ്ങനെ വരക്കാം</u>



ചിത്രത്തിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങൾ
ഈ രണ്ട് വരകൾക്ക് ലംബമാണ് .
അതായത് , വൃത്തകേന്ദ്രം ഈ രണ്ട്
വരകളിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലായിരിക്കണം.
അതിനാൽ വൃത്തകേന്ദ്രം ഈ കോണിന്റെ
സമഭാജിയിലാകണം .



കൂട്ടിമുട്ടുന്ന രണ്ടു വരകളെ തൊടുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം, വരകൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെ സമഭാജിയിലാണ്.



1) സമാന്തരമല്ലാത്ത രണ്ട് വരകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുമ്പോൾ ഒരു ഉണ്ടാകുന്നു .

2) ഈ കോണിന്റെ സമഭാജി വരയ്ക്കുക അതിലൊരു ബിന്ദു വൃത്ത കേന്ദ്രമായി എടുക്കണം

3) വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിനായി ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തം തൊടുന്ന വരയിലേയ്ക്കൊരു ലംബം വരയ്ക്കണം

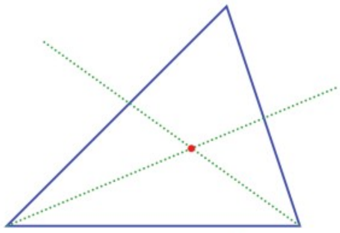
4) ഈ ലംബദൂരം ആരമാക്കി വൃത്തം വരയ്ക്കുക .

<u>ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളെയും തൊടുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ</u>

അല്ലെങ്കിൽ <u>ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ</u>

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളെയും തൊടുന്ന വൃത്തത്തെ അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം എന്നുപറയുന്നു .

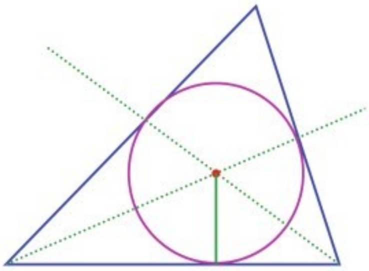
1) തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം വരയ്ക്കുക



2) ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് കോണുകളുടെ കോൺ സമഭാജി വരയ്ക്കുക .ഈ സമഭാജികൾ സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദു വൃത്ത കേന്ദ്രമായിരിക്കും .

3) ആരം കിട്ടുന്നതിനായി കേന്ദ്രബിന്ദുവിൽ നിന്നും ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക

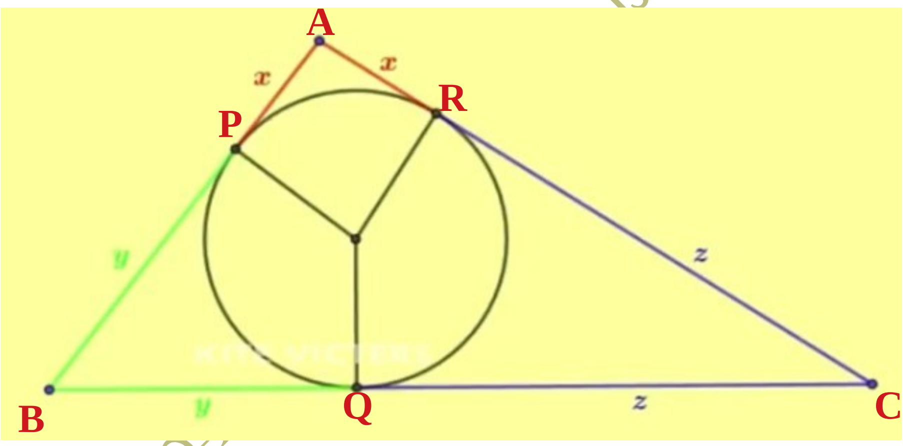
4) ഈ ലംബദൂരം ആരമാക്കി വൃത്തം വരയ്ക്കുക .



ഏതു ത്രികോണത്തിലും, കോണുകളുടെ സമഭാജികളെല്ലാം ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.

ഇങ്ങനെ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിനെ അന്തർവൃത്തകേന്ദ്രം എന്നുപറയുന്നു .

ചിത്രം നോക്കുക



ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേയ്ക്ക് വരക്കുന്ന തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്

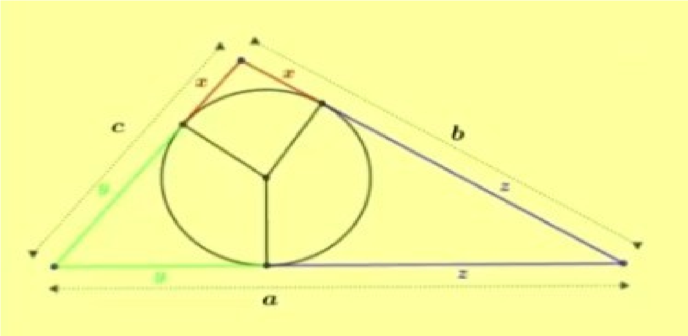
AP = AR = x, BP = BQ = y, CQ = CR = z

ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് **P = x + x + y + y + z + z**

= 2x + 2y + 2z

= 2(x + y + z)

അതായത് ചുറ്റളവിന്റെ പകുതി **S = (x + y + z)** ആയിരിക്കും .



ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ **a,b,c** എന്നിരിക്കട്ടെ

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും , $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$

$$x + y + z = s$$

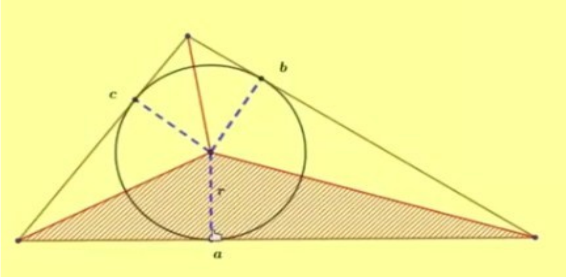
$$x = s - (y + z) = s - a$$

$$y = s - (x + z) = s - b$$

$$z = s - (x + y) = s - c$$

ഇതിൽ നിന്നും ,ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽ നിന്നുള്ള തൊട്ടുവരയുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിൽ നിന്നും എതിർവശത്തിന്റെ നീളം കുറച്ചാൽ മതിയാകും .

<u>ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് , അന്തർവൃത്തആരം , ചുറ്റളവിന്റെ പകുതി ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം</u>



ചിത്രത്തിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലേക്കുള്ള വരകൾ , ത്രികോണത്തെ മൂന്നായി ഭാഗിക്കും .

ഇവിടെ ചെറു ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം ഒരു വശം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം തന്നെയാണ് .കൂടാതെ ഈ വശങ്ങളിലേക്കുള്ള ഉയരം അന്തർവൃത്തആരവുമാണ് .

വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ **a,b,c** എന്നും അന്തർവൃത്തആരം **r** എന്നും ആയാൽ

ചെറു ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$ ആയിരിക്കും .

∴വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$

$$= \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$A = r \times s$$

$r = \frac{A}{s}$ അല്ലെങ്കിൽ $A = r \times s$

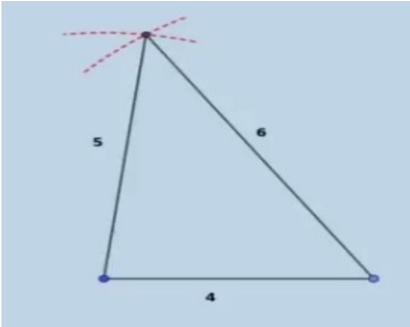
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതികൊണ്ട് ഹരിച്ചതിനു തുല്യമാണ്.

<u>പ്രവർത്തനം</u>

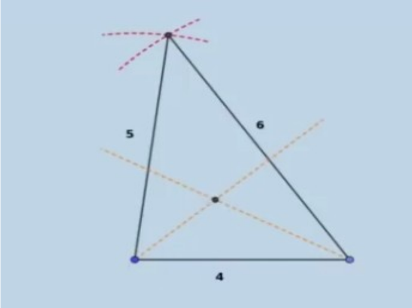
വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക. അന്തർ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം

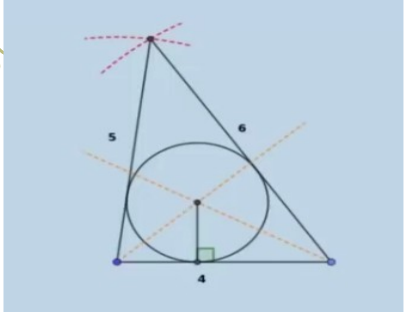
1) **4** സെ.മീ ,**5** സെ.മീ ,**6** സെ.മീ വശങ്ങളുള്ള ത്രികോണം വരക്കുക .



2) ഏതെങ്കിലും രണ്ട് കോണുകളുടെ കോൺ സമഭാജി വരയ്ക്കുക . ഈ സമഭാജികൾ സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദു വൃത്ത കേന്ദ്രമായിരിക്കും



3) കേന്ദ്രബിന്ദുവിൽ നിന്നും ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക



4) ഈ ലംബം ആരമാക്കി വൃത്തം പൂർത്തിയാക്കുക .

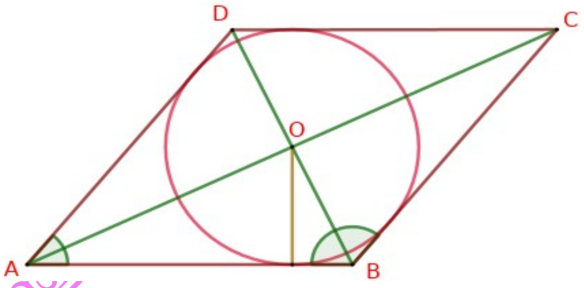
ഗവ.വി&എച്ച്എസ്സ്എസ്സ് കുളത്തൂർ പാറ

15 – 12 - 2020 ലെ ഓൺലൈൻ ക്ലാസ് ⟹ ക്ലിക്ക്

പ്രവർത്തനം

വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും ഒരു കോൺ 50° യും ആയ സമഭുജസാമാന്തരികം വരച്ച് അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

ഉത്തരം



1) ഒരു വശം **5** സെ.മീ ആയ സമഭുജസാമാന്തരികം **ABCD** വരയ്ക്കുക

2) സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ കോൺ സമഭാജികളായതിനാൽ , വികർണ്ണങ്ങൾ വരയ്ക്കുക

3) വികർണ്ണങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദു **O** എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തുക .ഇത് അന്തർവൃത്ത കേന്ദ്രമായിരിക്കും .

4)O എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു വശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക .

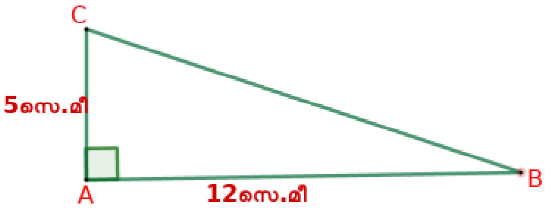
5)O കേന്ദ്രമായും ലംബം ആരമായും വൃത്തം വരയ്ക്കുക .

പ്രവർത്തനം

ലംബവശങ്ങൾ 5 സെന്റിമീറ്ററും 12 സെന്റിമീറ്ററുമായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്ത ആരം കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം

$A = r \times s$



ഇതിൽ A =ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

r = അന്തർവൃത്ത ആരം

s = ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതി

ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = $A = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$ ച.സെ.മീ

ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് = $P = 5+12+13 = 30$ സെ.മീ

ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതി = $s = \frac{30}{2} = 15$ സെ.മീ

അന്തർവൃത്ത ആരം = $r = \frac{A}{s} = \frac{30}{15} = 2$ സെ.മീ

$BC = \sqrt{12^2+5^2}$

$= \sqrt{144+25}$

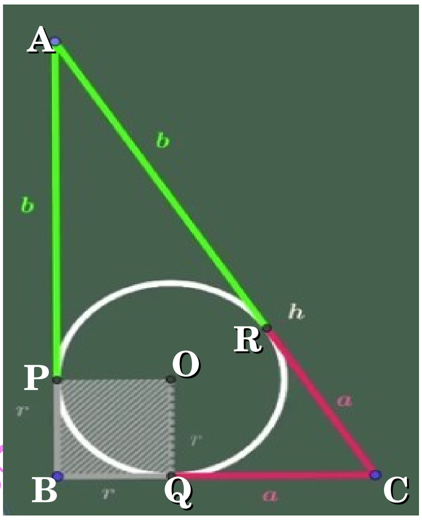
$= \sqrt{169}$

$= 13$ സെ.മീ

പ്രവർത്തനം

ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം h ഉം, അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം r ഉം ആണെങ്കിൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $r(h+r)$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം



കർണ്ണം = **AC=h**

അന്തർവൃത്ത ആരം = **r**

ചിത്രത്തിൽ മട്ടത്രികോണം **ABC** യുടെ അന്തർവൃത്തം ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെ **P,Q,R** എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുന്നു .

നമുക്കറിയാം ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേയ്ക്ക് വരക്കുന്ന തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ് .

CQ = CR = a, AP = AR = b

OPBQ സമചതുരമാണ് .

BP = BQ = r (അന്തർവൃത്ത ആരം)

AC = h = a + b

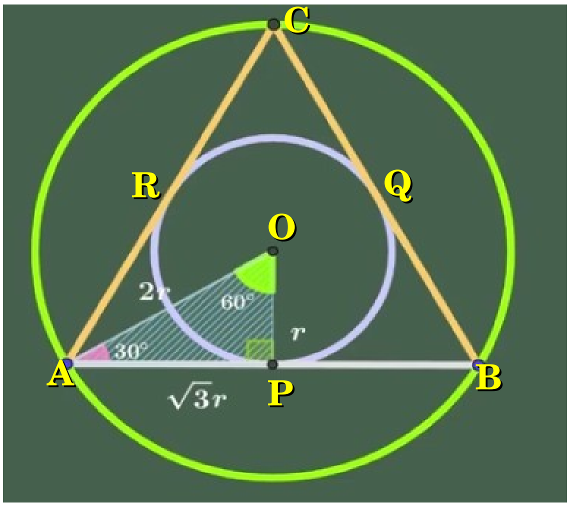
ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതി = **s =a+b+r**

ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = **A = r × s =r(a+b+r) = r(h+r)**

പ്രവർത്തനം

ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം, അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം



ചിത്രത്തിലെ സമഭുജത്രികോണം **ABC** യുടെ അന്തർവൃത്ത കേന്ദ്രവും പരിവൃത്ത കേന്ദ്രവും **O** എന്ന ബിന്ദു തന്നെയാണ് .

അന്തർവൃത്തം ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെ **P,Q,R** എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുന്നു .

ΔOAP പരിഗണിക്കുക

∟APO = 90°

നമുക്കറിയാം ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളെല്ലാം 60^0 വീതമാണ് .

∟BAC യുടെ സമഭാജിയാണ് **AO**

∟OAP = 30° , ∟AOP = 60°

ΔOAP യുടെ കോണുകൾ **30°, 60°, 90°** ആണ് .

ΔOAP യുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം **1:√3:2** ആയിരിക്കും .

∴ OP = r, AO = 2r

ഇതിൽ നിന്നും ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം ,അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം .

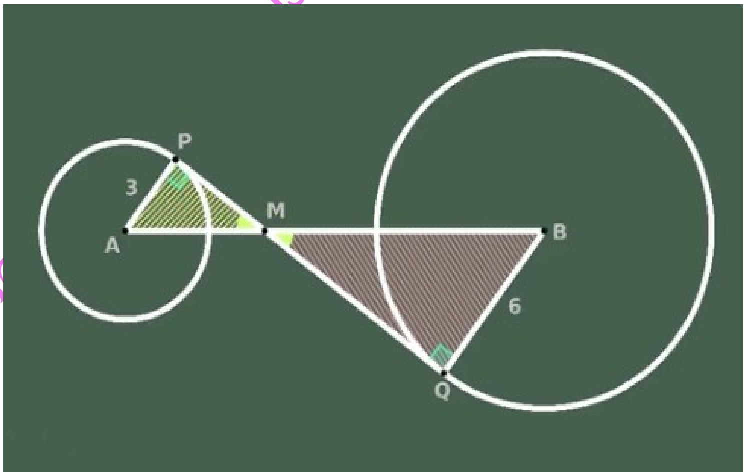
പ്രവർത്തനം

ഉത്തരം

ചിത്രത്തിൽ **AP =3** സെ.മീ ,

BQ = 6 സെ.മീ **,AB = 15** സെ.മീ

PQ എന്ന തൊടുവരയുടെയും **AB** എന്ന വരയുടെയും സംഗമബിന്ദുവാണ് **M .**



ΔAPM , ΔBQM പരിഗണിക്കുക

∟ APM = ∟ BQM = 90°

∟ AMP = ∟ BMQ

(എതിർകോണുകൾ തുല്യം)

അതിനാൽ **ΔAPM , ΔBQM** സദൃശ ത്രികോണങ്ങളാണ് .

തുല്യ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ ആനുപാതികമാണ് .

AP:BQ = 3:6 = 1:2

AM:BM = 1:2

AB = 15 സെ.മീ

$AM = \frac{1}{3} \times 15 = 5$ സെ.മീ

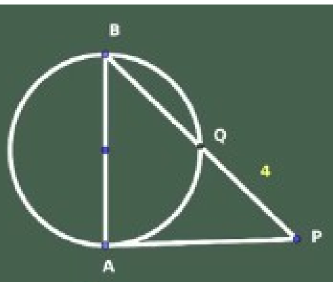
$BM = \frac{2}{3} \times 15 = 10$ സെ.മീ

$\Delta APM,\ PM = \sqrt{5^2-3^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$ സെ.മീ

$\therefore QM = 2 \times 4 = 8$ സെ.മീ

$PQ = PM+QM = 4 + 8 = 12$ സെ.മീ

പ്രവർത്തനം



ചിത്രത്തിൽ AB വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും AP തൊടുവരയുമാണ്. PB=9 cm PQ= 4 cm, ആയാൽ AP യുടെ നീളം കണക്കാക്കുക. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്.

ഉത്തരം

ചിത്രത്തിൽ **AB** വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും **AP** തൊടുവരയുമാണ് .

$\angle PAB = 90°$

PQ = 4 സെ.മീ,**PB = 9** സെ.മീ

$PQ \times PB = PA^2$

$4 \times 9 = PA^2$

$PA^2 = 36$

$PA = \sqrt{36} = 6$ സെ.മീ

മട്ടത്രികോണം **APB** ൽ ,

$AB = \sqrt{PB^2 - PA^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45}$

വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം = $\sqrt{45}$

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം = $\frac{\sqrt{45}}{2}$ സെ.മീ

ഗവ.വി&എച്ച്എസ്എസ് കുളത്തൂർ പാഠശാല