അദ്ധ്യായം 8

ഘനരൂപങ്ങൾ

സമചതുരസ്തൂപിക

- വികർണത്തിന്റെ നീളം = $\sqrt{2}a$
- പാദചുറ്റളവ് = 4a
- സമചതുരസ്തൂപികയുടെ, ഉയരത്തിന്റെ വർഗം (h^2) ചരിവുയരത്തിന്റെ വർഗം (l^2) പാർശ്വവക്കിന്റെ വർഗം(e^2) ഇവ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണ് ഇതിന്റെ പൊതുവ്യത്യാസം $\left(\frac{a}{2}\right)^2$
- പാദപരപ്പളവ് = a^2
- ഒരു പാർശ്വമുഖത്തിന്റെ പരപ്പളവ് = $\frac{1}{2}a\,l$
- പാർശ്വതലപരപ്പളവ് = $2al$
- ഉപരിതലപരപ്പളവ് = $a^2 + 2\,al$
- വ്യാപ്തം = $\frac{1}{3}a^2h$
- വക്കുകളുടെ ആകെ നീളം = 4a + 4e
- പാർശ്വമുഖങ്ങൾ സമഭുജത്രികോണങ്ങളായാൽ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് = $a^2\sqrt{3}$
- ഉപരിതലപരപ്പളവ് = $a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$

വൃത്തസ്തൂപിക

- വൃത്താംശത്തെ വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക ആക്കി മാറ്റിയാൽ വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം ($R = l$)
- ചാപനീളം = വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചുറ്റളവ്

- ♦ $\frac{r}{l} = \frac{x}{360}$ (x = വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ)
- ♦ വക്രതലപരപ്പളവ് = $\pi r l$
- ♦ ഉപരിതലപരപ്പളവ് = $\pi r^2 + \pi r l = \pi r (r+1)$
- ♦ വ്യാപ്കം = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

ഗോളം

- ❖ "r" ആരത്തോട് കൂടിയ ഒരു ഗോളത്തിന്റെ
- ❖ ഉപരിതലപരപ്പളവ് = $4\pi r^2$
- ❖ വ്യാപ്തം = $\frac{4}{3}\pi r^3$
- ❖ r_1 , r_2 ആരമായ രണ്ടുഗോളങ്ങളുടെ

  പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം = $r_1^2 : r_2^2$

  വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം = $r_1^3 : r_2^3$

അർദ്ധഗോളം

- ❖ "r" ആരത്തോട് കൂടി ഒരു അർധഗോളത്തിന്റെ
- ❖ പാദപരപ്പളവ് = πr^2
- ❖ വക്രതലപരപ്പളവ് = $2\pi r^2$
- ❖ ഉപരിതലപരപ്പളവ് = $3\pi r^2$
- ❖ വ്യാപ്തം = $\frac{2}{3}\pi r^3$
- ❖ r_1, r_2 ആരമായ രണ്ട് അർധഗോളങ്ങളുടെ

  പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം = $r_1^2 : r_2^2$

- ❖ വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം = $r_1^3 : r_2^3$

SECTION A (2 MARKS)

1 ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ എല്ലാ വശങ്ങളും തുല്യമാണ് വശങ്ങളുടെ ആകെ നീളം 80 cm ആയാൽ

a) ഒരു പാദവക്കിന്റെ നീളമെത്ര?

b) ചരിവുയരമെത്ര?

2. ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദവക്ക് 16cm ചരിവുയരം 10cm ആയാൽ

a) ഉയരം എത്ര?

b) പാർശ്വവക്കിന്റെ നീളമെത്ര?

3. ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം 16 cm, ആരം 12 cm ഉം ആണ്.

a) സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം കാണുക.

b) വൃത്താംശത്തെ മുറിച്ചുണ്ടാക്കിയ ഇതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്ര?

4. 30 cm ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ നിന്ന് 60^0 കേന്ദ്രകോണുള്ള ഒരു വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുക്കുന്നു. ഇതുപയോഗിച്ച് ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക നിർമ്മിച്ചാൽ

a) ചരിവുയരം എത്ര?

b) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരം എത്ര?

5. രണ്ട് അർധഗോളങ്ങളുടെ ആരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2: 3 ആണ് ഒന്നാമത്തെ അർധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 100 ഘന സെ.മീ. ആയാൽ രണ്ടാമത്തേതിന്റെ വ്യാപ്തം എത്ര?

6. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് $100\pi\, cm^2$

a) ഇതിന്റെ ആരം എത്ര?

b) ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എത്ര?

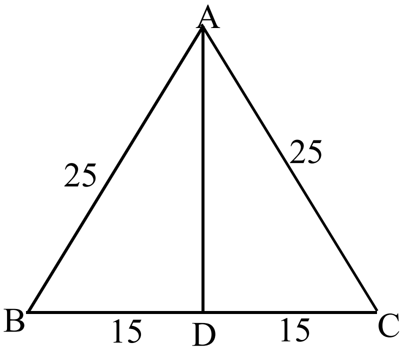
SECTION B (3 MARKS)

7. ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖമാണ് ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

AB = AC = 25 cm and BD = DC = 15 cm.

a) പാദവക്കിന്റെ നീളമെത്ര?

b) പാർശ്വതല പരപ്പളവ് എത്ര?



8. ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വക്കുകൾക്കെല്ലാം ഒരേ നീളമാണ് ആകെ നീളം 80 cm ആയാൽ

a) പാർശ്വവക്കിന്റെ നീളമെത്ര?

b) ചരിവുയരം എത്ര?

c) ഉയരം എത്ര?

d) പാദവക്ക്, ചരിവുയരം, ഉയരം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കാണുക.

9. 120^0 കേന്ദ്രകോണുള്ള ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നു.

a) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരവും ചരിവുയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കാണുക.

b) വക്രതലപരപ്പളവ് $108\pi\,cm^2$ ആയാൽ ചരിവുയരം, ആരം എന്നിവ കാണുക.

10. ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരം, ചരിവുയരം എന്നിവ 6 cm, 10 cm ആയാൽ

(a) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം കാണുക.

(b) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക.

11. രണ്ട് ഗോളങ്ങളുടെ വ്യാസങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 2 : 3.

(a) ആരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കാണുക.

(b) ഉപരിതല പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധം കാണുക.

(c) ഒന്നാമത്തെ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് $16\pi\,cm^2$ ആയാൽ, രണ്ടാമത്തെ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് കാണുക.

12. 9 cm ആരമുള്ള ഒരു അർധഗോളം ഉരുക്കി. 3 cm ആരവും 6 cm ഉയരവുമുള്ള വൃത്തസ്തൂപിക നിർമ്മിക്കുന്നു.

a) അർധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എത്ര?

b) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്ര?

c) എത്ര വൃത്തസ്തൂപികകൾ നിർമ്മിക്കാം?

SECTION C (4 MARKS)

13. വശങ്ങളുടെ തുല്യമായ ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദവക്ക് 20 cm.

a) ഇതിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് കണ്ടെത്തുക.

b) സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുക.

14. ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം 20 cm, അതിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് 624 cm^2.

a) സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളമെത്ര?

b) സ്തൂപികയുടെ ഉയരമെത്ര?

c) സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക.

15. വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു പേപ്പറിനെ 2 വൃത്താംശങ്ങളായി മുറിക്കുന്നു. ഇതിൽ ഒന്നിന്റെ കേന്ദ്ര കോൺ 160^0.

(a) രണ്ടാമത്തെ വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്ര?

(b) ഈ വൃത്താംശങ്ങൾ വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഇതിൽ ചെറുതിന്റെ ആരം 8 cm. വലുതിന്റെ ആരം എത്ര?

(c) രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം എത്ര?

16. 36 cm ആരമുള്ള വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു തകിട് 4 തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. ഇതിൽ ഒരു ഭാഗം വൃത്തസ്തൂപികയായി മാറ്റിയാൽ

(a) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം എത്ര?

(b) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരം എത്ര?

(c) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ് കാണുക.

17. അർധഗോളാകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിന്റെ വ്യാസം 14 m.

a) വ്യാപ്തം ലിറ്ററിൽ കണക്കാക്കുക.

b) ഇതിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് പെയ്ന്റ് ചെയ്യുന്നതിനുള്ള ചിലവ് കണക്കാക്കുക. (Rs. 100/m^2)

18. വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ബക്കറ്റ് അതിന്റെ ഉയരം 32 cm ആരം 12 cm ആണ്. ഇതിൽ നിറച്ചിരിക്കുന്ന മണ്ണ് നിലത്തിടുമ്പോൾ ഒരു വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിൽ കാണപ്പെടുന്നു. സ്തൂപികയുടെ ഉയരം 24 cm ആയാൽ ആരവും ചരിവുയരവും കണ്ടെത്തുക.

SECTION D (5 MARKS)

19. പാദആരം 12 cm ഉയരം 15 cm ആയ ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിൽ നിന്നും ഏറ്റവും വലിപ്പമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക വെട്ടിയെടുക്കുന്നു.

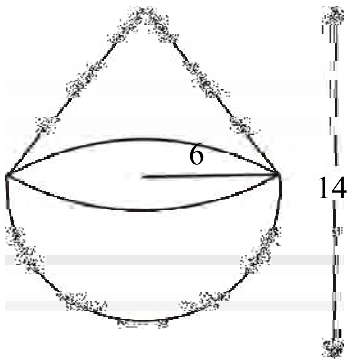
a) വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എത്ര?

b) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്ര?

c) ബാക്കി വന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എത്ര?

d) വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ബാക്കി വന്ന ഭാഗം ഉരുക്കി 4cm ആരവും 6 cm ഉയരമുള്ള വൃത്തസ്തൂപികകൾ നിർമ്മിച്ചാൽ എത്രയെണ്ണം കിട്ടും.

20. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു അർധഗോളവും വൃത്തസ്തൂപികയും ചേർത്തു വെച്ചിരിക്കുന്നു. അർധഗോളത്തിന്റെ ആരം 6 cm. രൂപത്തിന്റെ ആകെ ഉയരം 14 cm ആയാൽ



(a) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം എത്ര?

(b) വൃത്തസ്തൂപിക, ഗോളം എന്നിവയുടെ വ്യാപ്തം എത്ര?

(c) രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എത്ര?

21. ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരം 2 cm ഉയരം 8 cm.

(a) വ്യാപ്തം കാണുക.

(b) ഇതിനെ ഉരുക്കി ഒരു ഗോളമുണ്ടാക്കിയാൽ, അതിന്റെ ആരം എത്ര?

22. വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തടികഷണത്തിന്റെ ആരം 8 cm ഉയരം 15 cm. ഇതിൽ നിന്നും ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തൂപിക ചെത്തിയെടുത്താൽ

(a) ആരം?

(b) ചരിവുയരം?

(c) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ് എത്ര?

ANSWER

SECTION A

1. a) പാദവക്ക് =10 [given 8 a = 80]

   b) $l = \sqrt{100-25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm

2. a) $h = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ cm

   b) $e = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164}$ cm

3. a) $l = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20$ cm

   b) $\frac{x}{360} = \frac{12}{20}$; $x = \frac{12 \times 360}{20} = 216^0$

4. a) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം = വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം = 30 cm

   b) $r = \frac{60}{360} \times 30 = 5$ cm

5. $r_1 : r_2 = 2 : 3$ $v_1 : v_2 = 8 : 27$ $\frac{100}{v_2} = \frac{8}{27}$

   $V_2 = \frac{2700}{8}$

6. (a) $4\pi r^3 = 100\pi$ $r^2 = \frac{100\pi}{4\pi} = 25$

   $r = 5$ cm

   (b) $V = \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{500\pi}{3} \text{cm}^3$

SECTION B

7. (a) പാദവക്ക് = 30cm

(b) $l = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$ cm LSA = 2 × 30 × 20 = 1200cm^2

8. a) $e = \frac{80}{8} = 10$ cm

b) $l = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm

c) $h = \sqrt{75 - 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm

d) അംശബന്ധം = $10 : 5\sqrt{3} : 5\sqrt{2} = 2 : \sqrt{3} : \sqrt{2}$

9. a) r : 1 = 120 : 360 = 1 : 3

b) Let r = x, 1 = 3x

$3\pi x^2 = 108\pi$

x = 6 cm

r = 6 cm 1 = 18 cm

10. (a) $h = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ cm

(b) $V = \frac{\pi}{3} \times 6^2 \times 8 = 96\,\pi cm^3$

11. (a) $r_1 : r_2 = d_1 : d_2 = 2 : 3$

(b) $A_1 : A_2 = 2^2 : 3^2 = 4 : 9$

(c) $16\pi : A_2 = 4 : 9$

$A_2 = \frac{16\pi \times 9}{4} = 36\pi$

12. (a) അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $= \frac{2\pi}{3}(9)^3 = 486\pi$

(b) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $= \frac{\pi}{3}(3)^2 \times 6 = 18\pi$

(c) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ എണ്ണം $= \frac{486\pi}{18\pi} = 27$

SECTION C

13. $a = e = 20$ cm $l = \frac{a}{2}\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$, $h = \frac{a}{2}\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

a) ഉപരിതലപരപ്പളവ് $= (1+\sqrt{3})\ a^2 = 400\ (1 + \sqrt{3})cm^2$

b) വ്യാപ്തം $= \frac{1}{3}a^2h = \frac{4000\sqrt{2}}{3}\ cm^3$

14. ഉപരിതലപരപ്പളവ് $= 624\ cm^2$

a) $a^2 + 40a = 624 = 12$ cm

b) $h = \sqrt{400-144} = \sqrt{256} = 16cm$

c) $V = \frac{1}{3} \times 12^2 \times 16 = 768\ cm^3$

15. (a) കേന്ദ്രകോൺ $= 360 - 160 = 200^0$

(b) 8 : R = 160 : 200 രണ്ടാമത്തെ വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം = 20 cm

(c) $l = \frac{8 \times 360}{160} = 18$ cm

16. (a) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം = വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം = 36

(b) $r = \frac{90}{360} \times 36 = 9$ cm

(c) CSA = $\pi rl = \pi \times 9 \times 36 = 324\pi$

17. (a) $V = \frac{2}{3} \times \pi \times 7^3 = \frac{2156}{3}$

(b) പെയി ന്റ് ചെയ്യുന്നതിനുള്ള ചെലവ് = $\frac{2 \times 22}{7} \times 7^2$ = Rs. 30800

18. Volume of the cone = Volume of the cylinder

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi R^2 H$$

$$\frac{1}{3}\pi \times r^2 \times 24 = \pi \times 18^2 \times 32$$

$$8\pi \times r^2 = \pi \times 18^2 \times 32$$

$$r^2 = \frac{\pi \times 18 \times 18 \times 32}{8\pi}$$

$$r = \sqrt{1296} = 36 \text{ cm}$$

$$l = \sqrt{36^2 + 24^2} = \sqrt{1872} = 12\sqrt{13} \text{ cm}$$

SECTION D

19. (a) വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം = $\pi r^2 h = \pi \times 12^2 \times 15 = 2160\ \pi cm^3$

(b) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 12^2 \times 15 = 720\pi\ cm^3$

(c) ബാക്കിയുള്ള വ്യാപ്തം = $2160\ \pi cm - 720\pi = 1440\pi$

$$n \times \frac{1}{3}\pi r^2 h = 1440\ \pi$$

(d) $n \times \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 6 = 1440\pi$

$n \times 32\pi = 1440\pi$

$n = 45$

20. (a) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം = 14 – 6 = 8

(b) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi\, cm^3$

അർദ്ധഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$= \frac{2}{3}\pi r^2 \quad = \frac{2}{3}\pi \times 6^2 = 144\pi\, cm^3$

(c) ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$= 96\pi + 144\pi = 240\pi\, cm^2$

21. (a) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $= \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad = \frac{1}{3}\pi \times 2^2 \times 8 = \frac{32\pi}{3}$

(b) ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം = വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32\pi}{3}$

$r^3 = 8 \qquad r = \sqrt[3]{8} = 2$ cm

22. (a) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരം = വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആരം = 8 cm

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം = വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം = 15 cm

(b) $l = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$ cm

(c) വക്രതലപരപ്പളവ് $= \pi rl = \pi \times 8 \times 17 = 136\pi cm^2$

അദ്ധ്യായം 9

ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും

മുന്നറിവ്

- x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ y സൂചക സംഖ്യകൾ തുല്യമാണ്.
- y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ x സൂചക സംഖ്യകൾ തുല്യമാണ്.
- സൂചക സംഖ്യകൾ $(x_1\ y), (x_2, y)$ ആയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $|x_1 - x_2|$ ആണ്.
- സൂചകസംഖ്യകൾ $(x, y_1), (x, y_2)$ ആയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $|y_1 - y_2|$ ആണ്.
- സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y) ആയ ബിന്ദുവും ആധാര ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം $\sqrt{x^2+y^2}$ ആണ്.
- സൂചകസംഖ്യകൾ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ആയ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

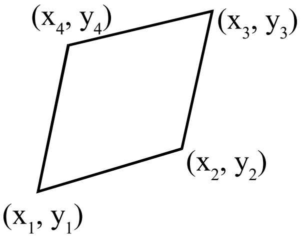
പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാല് മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), x_4, y_4)$ ആയാൽ

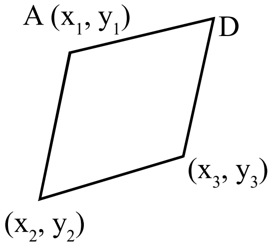
  $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ ഉം

  $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$ ഉം

  ആയിരിക്കും.

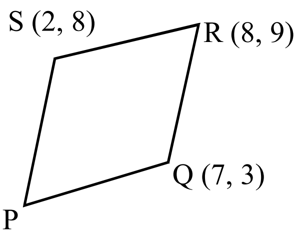


- ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ മൂന്ന് മൂലകളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ആയാൽ നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $D\ (x_1 + x_3 - x_2, y_{11} + y_3 - y_2)$



ഉദാ: ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ മൂന്ന് മൂലകങ്ങളുടെ സൂചകം തന്നിരിക്കുന്നു. നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം : P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(7 + 2 - 8, 3 + 8 - 9 \Rightarrow (1, 2)$



- (x_1, y_1) , (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഒരു ബിന്ദു (x, y) ആണ്. ഈ ബിന്ദു വരയെ m : n എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു എങ്കിൽ (x, y) യുടെ സൂചകസംഖ്യ

$$x = x_1 + \frac{m}{m+n}(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + \frac{m}{m+n}(y_2 - y_1)$$

OR

$$P(x, y) = P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

ഉദാ : (4, 2), (9, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ 2:3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ ഏവ?

ഉത്തരം : $x = x_1 + \frac{m}{m+n}(x_2 - x_1) = 4 + \frac{2}{5}(5) = \mathbf{6}$

$y = y_1 + \frac{m}{m+n}(y_2 - y_1) = 2 + \frac{2}{5}(5) = \mathbf{4}$

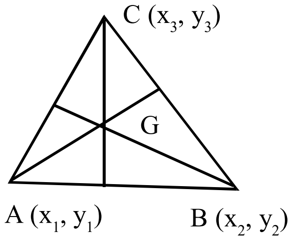
$(x, y) \Rightarrow (6, 4)$

- (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോദിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ആണ്.

ഉദാ: P (-3, 4), Q (7, 8) എന്നിവ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളാണ്. PQ വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്ര ത്തിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

ഉത്തരം : വൃത്തകേന്ദ്രം $\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{4+8}{2}\right) \Rightarrow (2, 6)$

- മൂലകങ്ങളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$



ഉദാ: ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് മൂലകൾ (3, 4), (-7, -2), (10, -5) ആണ്.

ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ ഏവ?

ഉത്തരം:

$$\left(\frac{3+(-7)+10}{3}, \frac{4+(-2)+(-5)}{3}\right) \Rightarrow (2, -1)$$

- അക്ഷങ്ങളൊന്നും സമാന്തരമല്ലാത്ത ഏത് വരയിലും y സൂചക സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം x സൂചക സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തെ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നതാണ്. ഈ നിശ്ചിത സംഖ്യയെ വരയുടെ ചരിവ് എന്നുപറയുന്നു. അതായത്, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് (m)

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

ഉദാ: (1, 4), (3, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് എത്ര?

ചരിവ് (m) $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-4}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$

- (x_1, y_1) , (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു (x, y) ആയാൽ വരയുടെ സമവാക്യം.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

ഉദാ: (3, 4), (5, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം എന്ത്?

ഉത്തരം : ചരിവ് (m) $= \frac{7-4}{5-3} = \frac{3}{2}$

സമവാക്യം : $y - 4 = \frac{3}{2}(x - 3)$

$2(y - 4) = 3(x - 3)$

$3x - 2y - 1 = 0$

- ഒരേ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ ചരിവുകൾ തുല്യമാണ്.

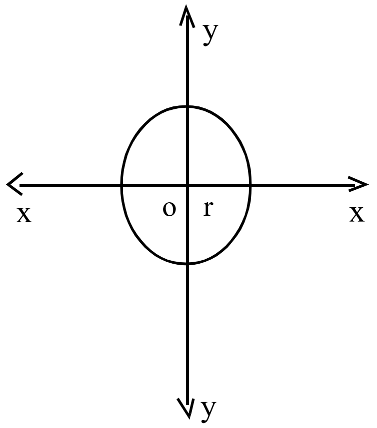
ഉദാ: (3, 2), (8, 5), (13, 8) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം : (3, 2) , (8, 5) = ചരിവ് $\frac{5-2}{8-3} = \frac{3}{5}$

(8, 5) , (13, 8) = ചരിവ് $\frac{8-5}{13-8} = \frac{3}{5}$

ചരിവുകൾ തുല്യമായതുകൊണ്ട് (3, 2), (8, 5), (13, 8) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണ്.

- സമാന്തരങ്ങളായ രണ്ട് വരകളുടെ ചരിവുകൾ തുല്യമാണ്. (അതായത് $m_1 = m_2$)
- പരസ്പരം ലംബങ്ങളായ രണ്ട് വരകളുടെ ചരിവുകളുടെ ഗുണനഫലം -1 ആണ്. (അതായത് $m_1m_2 = -1$)
- ആരം 'r' ഉം കേന്ദ്ര ആധാരബിന്ദുവുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2 + y^2 = r^2$ ആണ്.



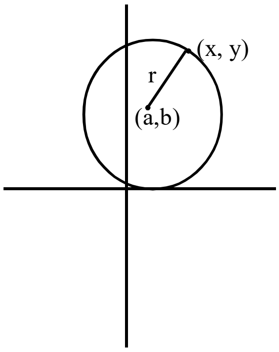
ഉദാ: ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2 + y^2 = 36$ ആണ്.

a) വൃത്തകേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

(0, 0)

b) വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര? 6.

- (x_1, y_1) കേന്ദ്രവും ആരം 'r' ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$



ഉദാ: കേന്ദ്രം (4, 3) ഉം ആരം 2 ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം എഴുതുക.

ഉദാ: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 2^2$

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$

PART : A

(2 Scores)

1. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2 + y^2 = 81$ ആണ്.

   a) വൃത്തകേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

   b) വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?

2. A(m, 3), B(3, -5), C(4, 3) എന്നിവ ഒരേ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളാണ്, എങ്കിൽ m ന്റെ വില കാണുക.

3. (5, -2) ,(7, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ മറ്റ് രണ്ട് ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

4. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 4^2$ എന്നതാണ് എങ്കിൽ

   a) വൃത്തകേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

   b) വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര?

5. P(4, 7) , Q (8, a) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് 3 ആണ്. എങ്കിൽ 'a' യുടെ വില എത്ര?

PART : B

(3 Scores)

6. (4, -3), (7, 2), (10, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. (2, 3), (3, -1) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് (5, -9) എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. (6, -3) എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വരയുടെ ചരിവ് 2 ആണ്.

a) വരയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.

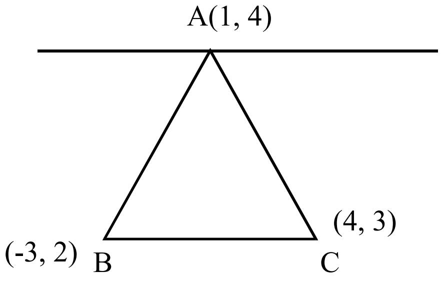
b) ഈ വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണോ (4, -7) എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

9. A (3, 0), B (7, 0), C (9, 3) എന്നിവ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ 3 മൂലകൾ ആണ്.

a) AC യുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

b) സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

10. ചിത്രത്തിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ A(1, 4), B(-3, 2), C(4, 3) ആയാൽ



a) BC യുടെ ചരിവ് എത്ര?

b) A എന്ന മൂലയിലൂടെ BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായ വരയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.

PART : C

(4 Scores)

11. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ A(-4, 6), B(6, -2), C(4, 5) ആണ്.

a) ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

b) AB യുടെ മധ്യബിന്ദു എഴുതുക.

c) C യിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന നടുവരയുടെ നീളം എത്ര?

12. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 100$ ആണ്.

a) വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

b) വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര?

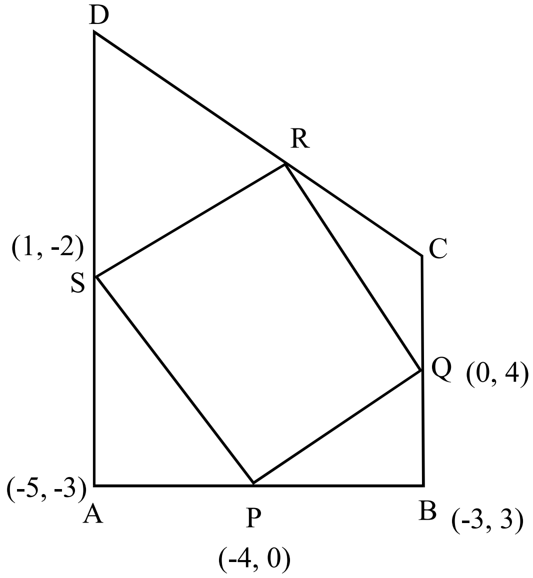
c) (16, 12) എന്ന ബിന്ദു ഈ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദു ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

13. a) (1, 3) , (2, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് എത്ര?

b) വരയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.

c) (m, n) ഈ വരയിലെ ബിന്ദു ആണെങ്കിൽ (m+1, n+4) ഉം ഈ വരയിലെ ബിന്ദു ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

14. ചിത്രത്തിൽ ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളാണ് P, Q, R, S.



a) PQRS ഏതുതരം ചതുർഭുജം ആണ്?

b) R എന്ന മൂലയുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

c) ചതുർഭുജം ABCD യിലെ C, D എന്നീ മൂലകളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

15. (8, 3) കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ചിരിക്കുന്നു. (8, 6) വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു ആണ്.

a) വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര?

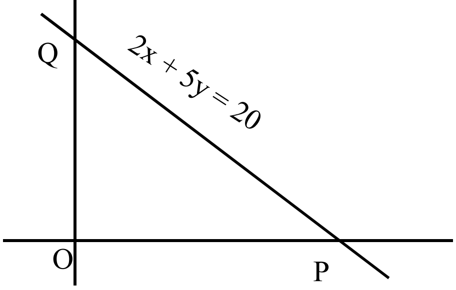
b) വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം എഴുതുക.

c) വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് x അക്ഷത്തിലേക്കുള്ള അകലം എത്ര?

PART : D

(5 Scores)

16. ചിത്രത്തിൽ PQ എന്ന വര x അക്ഷത്തെ P യിലും y അക്ഷത്തെ Q വിലും തൊടുന്നു. വരയുടെ സമവാക്യം $2x + 5y = 20$ ആണെങ്കിൽ

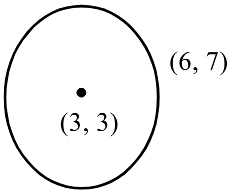


a) P , Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

b) OP, OQ ഇവയുടെ നീളം എത്ര?

c) PQ എന്ന വരയുടെ ചരിവ് എത്ര?

17. (3, 3) എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമാക്കി (6, 7) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ഒരു വൃത്തം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



a) വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര?

b) വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം എഴുതുക.

c) ഈ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ 6 ആയാൽ y സൂചക സംഖ്യ എത്ര?

18. P(-4, -8) R(8, 8) എന്നിവ ഒരു വരയിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ ആണ്. P യ്ക്കും R നും ഇടയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് Q. PQ : PR = 2:5 ആയാൽ

a) PR ന്റെ നീളം എത്ര?

b) PQ ന്റെ നീളം എത്ര?

c) Q ന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

19. a) A(-3, 5), B (4, -9) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് എത്ര?

b) വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് P(2, -5) എങ്കിൽ P എന്ന ബിന്ദു AB എന്ന വരയെ ഏത് അംശബന്ധത്തിൽ മുറിക്കും.

c) AB എന്ന വരയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.

20. ഒരു വരയുടെ സമവാക്യം y = 2x ആണ്.

a) ഈ വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് 'A'. ഈ ബിന്ദുവിന്റെ 'x' സൂചകസംഖ്യ -2 ആയാൽ y സൂചകസംഖ്യ എത്രയാണ്.

b) A കേന്ദ്രമായി 5 ആരമുള്ള വൃത്തം B(5, 5) എന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നുപോകുമോ?

c) B യിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 5 ഉം കേന്ദ്രം മുകളിൽ പറഞ്ഞ വരയിലുമാണ്. കേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ANSWERS

PART - A

1. a) (0, 0) b) 9

2. ചരിവുകൾ തുല്യമാണ്

$$\therefore \frac{-5-3}{3-m} = \frac{3-(-5)}{4-3}$$

$-8 = 24 - 8m$ **m = 4**

3. ഒരേ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ ചരിവുകൾ തുല്യമായിരിക്കും.

$$(5, -2) \text{ and } (7, 4) = \frac{4-(-2)}{7-5} = 3$$

$(5 + 3, -2 + 3)\ (7 + 3,\ 4 + 3) \Rightarrow (8, 1), (10, 7)$

$$\text{ചരിവ്} = \frac{7-1}{10-8} = \frac{6}{2} = 3$$

മറ്റ് രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ (8, 1), (10, 7)

4. a) (7, 4) b) 4

5. ചരിവ് = 3

$$\frac{a-7}{8-4} = 3 \qquad a = 19$$

PART - B

6. A(4, -3), B(7, 2), C(10, 7)

$$\text{AB യുടെ ചരിവ്} = \frac{2-(-3)}{7-4} = \frac{5}{3}$$

$$\text{BC യുടെ ചരിവ്} = \frac{7-2}{10-7} = \frac{5}{3}$$

ചരിവുകൾ തുല്യമായതുകൊണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണ്.

7. (2, 3), (3, 1) $\Rightarrow$ ചരിവ് = -4

(3, -1), (5, -9) $\Rightarrow$ ചരിവ് = -4

ചരിവുകൾ തുല്യമാണ്. (5, -9) എന്ന ബിന്ദു (2, 3), (3, -1) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ബിന്ദു ആണ്.

8. വരയുടെ ചരിവ് = 2

a) വരയുടെ സമവാക്യം $\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-3) = 2(x - 6)$

$2x - y - 15 = 0$

b) x = 4, y = -7 എന്നീ വിലകൾ സമവാക്യത്തിൽ ആരോപിച്ചാൽ

LHS

$2 \times 4 - (-7) - 15 = 8 + 7 - 15 = 0 = \text{RHS}$

LHS = RHS ആയതുകൊണ്ട് (4, -7) എന്ന ബിന്ദു ഈ വരയിലെ ബിന്ദു ആണ്.

a) AC യുടെ മധ്യബിന്ദു $\left(\frac{3+9}{2}, \frac{0+3}{2}\right) \Rightarrow (6, 1.5)$

b) $(3 + 9 - 7, 0 + 3 - 0) \Rightarrow (5, 3)$

10. a) BC യുടെ ചരിവ് $= \frac{3-2}{4-(-3)} = \frac{1}{7}$

b) BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായ വരയുടെ ചരിവ് $\frac{1}{7}$ ആയിരിക്കും.

$\therefore\ y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = \frac{1}{7}(x - 1)$

$7y - 28 = x - 1$

$x - 7y + 27 = 0$

PART - C

11. a) $\left(\frac{-4+6+4}{3},\frac{6+(-2)+5}{3}\right)\Rightarrow(2,3)$

b) $\left(\frac{-4+6}{2},\frac{6+-2}{2}\right)\Rightarrow(1,2)$

c) $\sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2} = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$

12. a) 8, 6 b) 10

c) x = 16, y = 12

LHS $(16-8)^2+(12-6)^2 = 8^2+6^2 = 100$ = RHS

LHS = RHS ആയതുകൊണ്ട് (16, 12) വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദു ആണ്.

13. a) ചരിവ് = $\frac{7-3}{2-1}$ = 4

b) y – 3 = 4(x–1) 4x – y – 1 = 0

c) m, n ഇവ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ആയതുകൊണ്ട് 4m – n – 1 = 0

m = m + 1, n = n+4 എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ

LHS 4(m + 1) – (n + 4) – 1 = 4 m – n – 1 = 0 = RHS

LHS = RHS ആയതുകൊണ്ട് (m + 1, n + 4) ഇവ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ആകും.

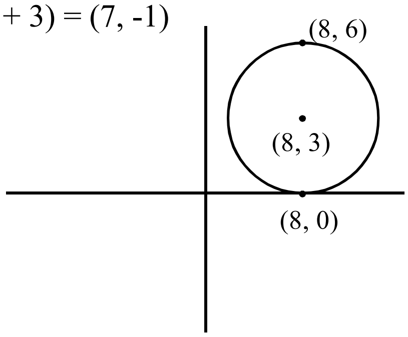
14. a) ചുതർഭുജത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജം ഒരു സാമാന്തരികം ആണ് (ഒമ്പതാം ക്ലാസ്)

b) R ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (1 + 0 – (-4), -2 + 4 – 0) ⇒ (5, 2)

c) C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (2 × 0 + 3, 2 × 4 – 3) = (3, 5)

D യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (2 × 1 + 5, 2 × -2 + 3) = (7, -1)

15. a) ആരം = |3 – 6| = 3



b) $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$

$(x-8)^2+(y-3)^2=3^2$

$x^2+y^2-16x-6y+64=0$

c) അകലം = ആരം = 3

PART - D

16. a) P എന്ന ബിന്ദു x അക്ഷത്തിൽ ആയതുകൊണ്ട് y സൂചകസംഖ്യ = 0

$2x = 20 \Rightarrow x = 10$

P സൂചകസംഖ്യ (10, 0)

Q എന്ന ബിന്ദു y അക്ഷത്തിൽ ആയതുകൊണ്ട് x സൂചകസംഖ്യ = 0

$5y = 20 \Rightarrow y = 4$

Q ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (0, 4)

b) OP = 10 OQ = 4

c) ചരിവ് $= \frac{4-0}{0-10} = \frac{4}{-10} = \frac{-2}{5}$

17. a) ആരം $= \sqrt{(3-6)^2+(3-7)^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$

$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$

c) x = 6 ആയാൽ

$(6-3)^2 + (y-3)^2 = 25 \quad (y-3)^2 = 16$

$y - 3 = \pm 4 \qquad y = 7$ or $y = -1$

18. a) $PR = \sqrt{(-4-8)^2+(-8-8)^2} = \sqrt{144+256} = \sqrt{400}$

b) PQ : PR = 2:5 (തന്നിട്ടുണ്ട്)

$\frac{PQ}{20} = \frac{2}{5} \Rightarrow PQ = 8$

c) PQ : QR = 8 : 12= 2 : 3

Q ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ

$x = x_1 + \frac{m}{m+n}(x_2 - x_1) = -4 + \frac{2}{5}(12) = \frac{4}{5}$

$y = y_1 + \frac{m}{m+n}(y_2 - y_1) = -8 + \frac{2}{5}(16) = \frac{-8}{5}$

Q $\left(\frac{4}{5}, \frac{-8}{5}\right)$

19. a) AB യുടെ ചരിവ് $= \frac{-9-5}{4-(-3)} = \frac{-14}{7} = -2$

b) $x = x_1 + \frac{m}{m+n}(x_2 - x_1)$

$2 = -3 + \frac{m}{m+n}(7)$

$5 = \frac{7m}{m+n}$

$5m + 5n = 7m$

$\frac{m}{n} = \frac{5}{2} \Rightarrow m:n = 5:2$

$y = y_1 + \frac{m}{m+n}(y_2 - y_1)$

$-5 = 5 + \frac{m}{m+n}(-14)$

$-10 = \frac{-14m}{m+n}$

$-10m - 10n = -14m$

$\frac{m}{n} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow m:n = 5:2$

c) $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 5 = -2(x - (-3))$

$y - 5 = -2x - 6$

$2x + y + 1 = 0$

20. a) $y = 2x$

$x = -2$, ആയാൽ $y = -4$

b) A യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(-2, -4)$

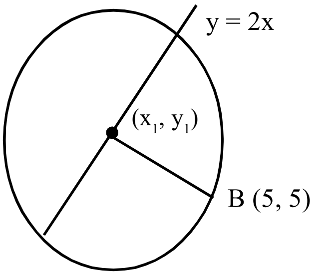
$AB = 5$

$(5 - (-2))^2 + (5 - (-4))^2 = 5^2$

$49 + 81 \neq 25$ ആയതുകൊണ്ട്

B(5, 5) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകില്ല.

c)



കേന്ദ്രം $(x_1\ y_1)$ ആയാൽ

$(x_1 - 5)^2 + (y_1 - 5)^2 = 5^2$

$y_1 = 2x_1$ ആരോപിച്ചാൽ

$5x_1^2 - 30x_1 = -25$

$x_1^2 - 6x_1 = -5$

$x_1^2 - 6x_1 + (3)^2 = (3)^2 + (-5)$

$(x_1 - 3)^2 = 4$

$\Rightarrow x_1 = 5$ അല്ലെങ്കിൽ $x_1 = 1$

$\therefore (x_1, y_1) \Rightarrow (5, 10)$ or $(1, 2)$

അദ്ധ്യായം 10

ബഹുപദങ്ങൾ

മുന്നറിവ്

$2.5x - 24x^2 + 4x^3$

$x^2 + 7x + 12$

$20 - 9.8x$

$x^2 + x$

ഇവയിൽ x എന്ന സംഖ്യയുടെ പല കൃതികളെ നിശ്ചിത സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയും അത്തരം ഗുണനഫലങ്ങൾ കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്തിരിക്കുന്നു. x അല്ലാതെ ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യകൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ഇത്തരം ക്രിയകൾ മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ബീജഗണിത വാചകങ്ങളെ ബഹുപദങ്ങൾ (Polynomials) എന്നു പറയുന്നു.

കുറിപ്പ്:

x എന്നത് മാറുന്ന സംഖ്യാണ്.

ബഹുപദങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ:-

- മാറുന്ന സംഖ്യയുടെ പല കൃതികൾ
- കൃത്യങ്കങ്ങൾ എല്ലാം എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ.
- കൃതികളെ നിശ്ചിത സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചിരിക്കുന്നു.
- ഗുണനഫലങ്ങളുടെ തുക അല്ലെങ്കിൽ വ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിച്ചിരിക്കുന്നു.
- ഇവയുടെ നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്തിരിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ് : മാറുന്ന സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം എടുക്കുക, ഘനമൂലമെടുക്കുക, വ്യുൽക്രമമെടുക്കുക തുടങ്ങിയ ക്രിയകളുള്ള ബീജഗണിതവാചകങ്ങൾ ബഹുപദങ്ങളല്ല.

ഉദാ : $x + \sqrt{x}$

$x^2 + \frac{4}{x}$

$\sqrt[3]{x} - 1$

ബഹുപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം:-

ഒരു ബഹുപദത്തിൽ മാറുന്ന സംഖ്യകളുടെ കൃത്രികളാണെടുക്കുന്നത്. ഇങ്ങനെ വരുന്ന ഏറ്റവും വലിയ കൃത്യങ്കത്തെ ബഹുപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം (Degree of the polynomial) എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാ: $x^2 + 5x + 6 \rightarrow$ കൃത്യങ്കം 2 ആണ്

$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \rightarrow$ കൃത്യങ്കം 3 ആണ്

$49 - 9.8x \rightarrow$ കൃത്യങ്കം 1 ആണ്

ബഹുപദങ്ങളുടെ പൊതുരൂപം

കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ബഹുപദങ്ങളുടെ പൊതുവായ രൂപം എഴുതാം.

ബഹുപദം	**പൊതുവായ രൂപം**	
ഒന്നാം കൃതി ബഹുപദം	$ax + b$	$a \neq 0$
രണ്ടാം കൃതി ബഹുപദം	$ax^2 + bx + c$	
മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദം	$ax^3 + bx^2 + cx + d$	

ഇവിടെ a, b, c, d എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ ബഹുപദത്തിലെ ഗുണകങ്ങൾ (coefficients) എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാ: $x^2 + 5x + 6$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ x^2 ന്റെ ഗുണകം 1, x-ന്റെ ഗുണകം 5, സ്ഥിരസംഖ്യ 6 ഉം ആണ്.

പ്രവർത്തനം

ചുവടെയുള്ള ബഹുപദങ്ങളിൽ P(0), P(1), P(–1) ഇവ കണക്കാക്കുക?

(a) $P(x) = 2x + 3$

(b) $P(x) = x^2 + 5x + 6$

ഉത്തരം

(a) $P(x) = 2x + 3$

$P(O) = 2 \times 0 + 3 = 0 + 3 = 3$

$P(1) = 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$

$P(-1) = 2(-1) + 3 = -2 + 3 = 1$

(b) $P(x) = x^2 + 5x + 6$

$P(0) = 0^2 + 5 \times 0 \times 6 = 0 + 0 + 6$

$= 6$

$P(1) = 1^2 + 5 \times 1 + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$

$P(-1) = (-1)^2 + 5 \times (-1) + 6 = 1 = 1 - 5 + 6 = 2$

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- P(x) എന്ന ബഹുപദത്തിനെ q(x), r(x) എന്നീ ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതിയാൽ q(x), r(x) ഇവയെ P(x) ന്റെ ഘടകങ്ങൾ എന്ന് പറയും.
- P(x) എന്ന ബഹുപദത്തിനെ (x-a) കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം P(a) യും (x+a) കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം P(-a) യും ആണ്.
- P(x) എന്ന ബഹുപദത്തിൽ P(a)=0 ആയാൽ (x-a) എന്നത് P(x) ന്റെ ഘടകമായിരിക്കും. അതുപോലെ P(-a) =0 ആയാൽ (x + a) എന്നത് P(x) ന്റെ ഒരു ഘടകമായിരിക്കുക.
- P(x) എന്ന ബഹുപദത്തിനെ (ax + b) കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം P (-b/a) ആയിരിക്കും.
- $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ p, q ആയാൽ $(ax^2 + bx + c)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ a(x-p) (x-q) ആയിരിക്കും.
- P(x) എന്ന ബഹുപദത്തിൽ P(1) എന്നത് ഗുണകങ്ങളുടെ തുകയും P(0) എന്നത് സ്ഥിരസംഖ്യയും ആണ്.
- P(x) ഒരു ബഹുപദവും 'a' എന്നത് ഒരു സംഖ്യയും ആയിരിക്കുമ്പോൾ (x-a) എന്നത് P(x) – P(a) എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഒരു ഘടകമായിരിക്കും.

പാർട്ട് എ 2 മാർക്ക് ചോദ്യങ്ങൾ

1. $P(x) = x^2 - 8x + 15$ ആയാൽ P(0) P(1) ഇവ എത്രയാണ്?
2. $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ P(0) ഉം P(–1) ഉം കാണുക?
3. $P(x) = 6x^2 - 11x + 3$ ആയാൽ P(2) കാണുക.
4. $P(x) = x^2 - 9x + 6$ ആയാൽ P(x) നോട് കൂടി ഏത് സംഖ്യകൂട്ടിയാലാണ് (x–1) ഘടകമായ ഒരു ബഹുപദം കിട്ടുക?
5. $P(x) = x^2 - kx + 18$ ആയാൽ P(x) ന്റെ ഒരു ഘടകം (x–3) ആയാൽ K യുടെ വിലയെന്ത്?

പാർട്ട് ബി (3 മാർക്ക്)

1. $P(x) = x^2 + 2x - 15$ ആയാൽ

   (a) P(5) കാണുക?

   (b) P(x) നെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക?

2. $P(x) = x^2 - Kx + 10$ ആയാൽ

   (a) P(x) ന്റെ ഘടകം (x–2) ആയാൽ K യുടെ വിലയെന്ത്?

   (b) P(x) ന്റെ ഒരു ഘടകം (x–2) ആയാൽ P(x) നെ രണ്ട് ഒന്നാം കൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണന ഫലമായി എഴുതുക.

3. $P(x) = x^2 + 2x - 15$ ആയാൽ

   (a) P(3) കണക്കാക്കുക?

   (b) (x-3) എന്നത് P(x) ന്റെ ഘടകമാണോ എന്തുകൊണ്ട്?

4. $P(x) = x^2 - 7x + 9$ ആയാൽ

   (a) P(2) കാണുക?

   (b) P(x) നോട് കൂടി ഏത് സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ് (x–2) ഘടകമായ ഒരു ബഹുപദം കിട്ടുക?

5. $P(x) = x^2 - 5x - 6$

   (a) P(x) നെ ഒന്നാം കൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക?

   (b) P(x) = 0 എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ കാണുക?

6. $P(x) = (x-1)(x-5)$ ആയാൽ

   (a) P(5) കാണുക.

   (b) P(x) നോട് കൂടി ഏത് സംഖ്യകൂട്ടിയാലാണ് ഒരു പൂർണ്ണവർഗം കിട്ടുക?

പാർട്ട് സി (4 മാർക്ക്)

1. $P(x) = (x-2)(x-8) + 5$

   (a) P(5) കാണുക?

   (b) P(x) ന്റെ ഘടകമാണോ (x – 7) എന്ന് പരിശോധിക്കുക?

   (c) P(x) നെ രണ്ട് ഒന്നാം കൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക?

2. $P(x) = x^{99} + 1$ ആയാൽ

(a) x + 1 കാണുക?

(b) x + 1, P(x) ന്റെ ഘടകമാണോ അല്ലായോയെന്നു പരിശോധിക്കുക?

(x-1), P(x) ന്റെ ഘടകമാണോ അല്ലയോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

3. $P(x) = 4x^2 + 9x + 2$ ആയാൽ

(a) P(2) കാണുക?

(b) P(x) – P(2) ന്റെ ഒരു ഘടകമെഴുതുക?

(c) P(x) – P(2) നെ രണ്ട് ഒന്നാം കൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക?

4. $P(x) = x^2 - 11x + 30$ ആയാൽ

(a) P(3) കാണുക!

(b) P(x) – P(3) ന്റെ ഒരു ഘടകമെഴുതുക?

(c) P(x) – P(3) നെ രണ്ട് ഒന്നാം കൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക?

5. (a) $P(x) = ax^2 + bx + c$ എന്നതിൽ P(0) = –5 ആയാൽ C യുടെ വില കാണുക?

(b) P(x) ന്റെ ഒരു ഘടകം (x–1) ആയാൽ a + b = 5 എന്ന് തെളിയിക്കുക?

പാർട്ട് - ഡി (5 മാർക്ക്)

1. $x^2 - 10x + 16 = (x-a)(x-b)$ ആയാൽ

(a) a + b എത്ര?

(b) ab എത്ര?

(c) $x^2 - 10x + 16$ നെ രണ്ട് ഒന്നാം കൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക?

(d) P(x) = 0 എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം കാണുക?

2. $P(x) = ax^2 - 2bx + c$ എന്ന ബഹുപദം പരിഗണിക്കുക.

(a)x–1 ഈ ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമായാൽ a, b, c സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്ന് സ്ഥാപിക്കുക?

(b) a, b, c സമാന്തരശ്രേണിയിൽ വരുന്ന രണ്ട് ബഹുപദങ്ങൾ എഴുതുക?

(c) $x^2 - 1$ എന്നത് P(x) ന്റെ ഘടകമായാൽ a + c എത്ര?

3. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - K$ ആയാൽ

(a) $(x-1)$ $P(x)$ ന്റെ ഘടകമാകണമെങ്കിൽ K യുടെ വില എന്തായിരിക്കണം.

(b) $P(x)$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണോ $(x+1)$ എന്നു പരിശോധിക്കുക?

4. താഴെപ്പറയുന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ രണ്ടു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക?

(a) $x^2 + 4x + 3$

(b) $x^2 + 14x + 48$

(c) $x^2 - 8x + 12$

കൂടുതൽ പ്രവർത്തനങ്ങൾ

1. $P(x) = lx^2 + mx + n$ ആയാൽ

(a) $P(1)$ കാണുക?

(b) $P(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ് $x + 1$ എങ്കിൽ

$m = l + n$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(c) $x + 1$ ഘടകമായ ഒരു രണ്ടാം കൃതി ബഹുപദം എഴുതുക?

2. x ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യയാൽ

(a) $x^2 - 8x$ നോട് ഏതു സംഖ്യകൂട്ടിയാൽ ഒരു പൂർണവർഗ്ഗം കിട്ടും?

(b) $x^2 - mx + 49$ ഒരു പൂർണവർഗ്ഗമാകണമെങ്കിൽ 'm' ഏതു സംഖ്യയാകണം.

(c) $x^2 - mx + n$ ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാണെങ്കിൽ $m^2 = 4n$ എന്ന് തെളിയിക്കുക?

(d) x-3 ഘടകമായതും പൂർണവർഗ്ഗവുമായ ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം എഴുതുക?

3. $P(x) = 0$ എന്ന രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ -3, ഉം -7 ഉം ആയാൽ

(a) $P(x)$ ന്റെ ഒരു ഘടകം എഴുതുക?

(b) $P(x)$ നെ രണ്ട് ഒന്നാം കൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക?

4. $x^2 + 5x - 14 = (x-a)(x-b)$ ആയാൽ

(a) $a + b$ യുടെ വിലയെന്ത്?

(b) ab യുടെ വിലയെന്ത്?

(c) $x^2 + 5x - 14$ നെ രണ്ടു ഒന്നാകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലായി എഴുതുക?

5. (a) $kx^2 + 12x - 14$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ K ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുക്കുമ്പോഴാണ് (x+7) ഘടകമായ ബഹുപദം കിട്ടുക!

(b) ഈ ബഹുപദത്തിന്റെ മറ്റൊരു ഘടകം കാണുക?

ഉത്തരങ്ങൾ പാർട്ട് എ

1. $P(0) = 15$

$P(1) = 1 - 8 + 15$

$P(1) = 16 - 8$

$P(1) = 8$

2. $P(0) = 2$

$P(-1) = 3 \times (-1)^3 - 2\times (-1)^2 - 3\times(-1)+2$

$P(-1) = -3-2+3+2$

$P(-1) = 0$

3. $P(2) = 6 \times 2^2 - 11 \times 2 + 3$

$P(2) = 24 - 22 + 3$

$P(2) = 5$

4. (x–1) ഘടകമായാൽ $P(1) = 0$ ആയിരിക്കും.

$P(1) = 1 - 9 + 6$

$P(1) = 7 - 9 = -2$

$P(1) + 2 = 0$

2 കൂട്ടിയാലാണ് (x–1) ഘടകമായ ബഹുപദം കിട്ടുക.

5. (x–3) ഘടകമായാൽ $P(3) = 0$ ആയിരിക്കുക.

$P(3) = 3^2 - K \times 3 + 18$

$O = 27 - 3K$

$$K = \frac{27}{3} = 9$$

പാർട്ട് ബി

1. $P(5) = 5^2 + 2 \times 5 - 15$

$P(5) = 25 + 10 - 15$

$P(5) = 20$

(b) $x^2 + 2x - 15 = x^2 + (a + b) x + ab$

$x^2 + 2x - 15 = (x+a)(x+b)$

$x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3)$

2. (a) $(x-2)$ ഘടകമായാൽ $P(2) = 0$ ആയിരിക്കും.

$P(2) = 2^2 - K \times 2 + 10$

$0 = 14 - 2k$

$K = 7$

(b) $x^2 - kx + 10 = x^2 - 7x + 10$

$x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$

3. $P(3) = 3^2 + 2 \times 3 - 15$

$P(3) = 9 + 6 - 15 = 0$

$P(3) = 0$ ആയതിനാൽ $x-3$, $P(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്.

4. $P(2) = 2^2 - 7 \times 2 + 9$

$P(2) = 4 - 14 + 9$

$P(2) = -1$

$P(2) + 1 = 0$

$P(x)$ ന്റെ കൂടെ '1' കൂടിയാലാണ്. $(x-2)$ ഘടകമായ ബഹുപദം കിട്ടുന്നത്.

5.(a) $x^2 - 5x - 6 = x^2 - (a+b) x + ab$

$a+b = -5$

$ab = -6$

$a = -6, \ b = 1$

(b) $P(x) = 0$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x-6)(x+1) = 0$

$x = 6, x = -1$

6.(a) $P(5) = (5-1)(5-5) = 0$

$P(5) = 0$

(b) $P(3) = (x-1)(x-5)$

$P(x) = x^2 - 6x + 5$

P(x) ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാകാൻ കൂട്ടേണ്ട സംഖ്യ 4

$x^2 - 6x + 5 + 4 = x^2 - 6x + 9 = x^2 - 6x + 3^2$

$x^2 - 6x + 5 + 4 = (x-3)^2$

പാർട്ട് സി

1.(a) $P(5) = (5-2)(5-8) + 5$

$P(5) = 3 \times -3 + 5 = -9 + 4 = -5$

(b) $P(7) = (7-2)(7-8)$

$P(7) = 5 \times -1 = -5 \neq 0$

$P(7) \neq 0, \therefore x - 7$ ഘടകമല്ല.

(c) $P(x) = (x-2)(x-8) + 5$

$= x^2 - 10x + 16 + 5$

$= x^2 - 10x + 21$

$P(x) = (x-7)(x+3)$

2. (a) $P(1) = 1^{99} + 1 = 1 + 1 = 2$

(b) $P(-1) = (-1)^{99} + 1 = -1 + 1 = 0$

$P(-1) = 0$ ആയതുകൊണ്ട് $(x+1)$ ഘടകമാണ്.

$P(-1) = 2 \neq 0$

$(x-1)$ ഘടകമല്ല.

3. $P(2) = 4 \times 2^2 + 9 \times 2 + 2$

$P(2) = 16 + 18 + 2 = 36$

$P(x) - P(2) = 4x^2 + 9x + 2 - 36$

$P(x) - P(2) = 4x^2 + 9x - 34 = 0$

$4x^2 + 9x - 34 = 0$

$a = 4$

$b = 9$

$c = -34$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 4 \times 4 \times 34}}{8}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{625}}{8}$$

$$x = \frac{-9 \pm 25}{8}$$

$$x = \frac{-9 + 25}{8}, \quad x = \frac{-9 - 25}{8}$$

$$x = \frac{16}{8}, \quad x = \frac{-34}{8}$$

$$x = 2, \quad x = \frac{-17}{4}$$

$x - 2 = 0, \quad 4x + 17 = 0$

OR

$P(x)$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദവും a എന്ന സംഖ്യയും എടുത്താൽ, $x-a$ എന്ന ഒന്നാം കൃതി ബഹുപദം $P(x) - P(a)$ എന്ന രണ്ടാം കൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ്.

$\therefore$ $P(x) - P(2)$ ന്റെ ഒരു ഒന്നാം കൃതി ഘടകമാണ് $(x-2)$

(c) $P(x) - (2) = (x-2)\left(x + \frac{17}{4}\right)$

$= (x-2)(4x+17)$

4. $P(3) = 3^2 - 11 \times 3 + 30$

$P(3) = 9 - 33 + 30 = 6$

$x = 3$ ആയതിനാൽ $x - 3$ ഒരു ഘടകമാണ്.

$P(x) - P(3) = x^2 - 11x + 30 - 6$

$P(x) - P(3) = x^2 - 11x + 24$

$P(x) - P(3) = (x-8)(x-3)$

5. $P(0) = -5$

$C = -5$

$P(1) = 0$

$a + b + c = 0$

$a + b - 5 = 0$

$a + b = 5$

പാർട്ട് ഡി

1. $x^2 - 10x + 16 = (x-a)(x-b)$

(a) $a + b = -10$

(b) $ab = 16$

(c) $x^2 - 10x + 16 = (x-8)(x-2)$

(d) $P(x) = 0$

$(x-8)(x-2) = 0$

$x = 8, x = 2$

2.(a) $P(x) = ax^2 - 2bx + c$

$P(1) = 0$

$a - 2b + c = 0$

$a + c = 2b$

$a = 1$
$b = 0$
$c = -1$

(b) $\therefore$ a, b, c സമാന്തരശ്രേണിയിലാണ്.

$a=1, c= 1, b = 1 \Rightarrow P(x) = x^2 - 2x + 1$

$a = 1, b = 2, c= 3 \Rightarrow P(x) = x^2 - 4x + 3$

(c) $P(x) = x^2 - 1 = x^2 + 0x - 1$

$a + c = 1 + -1 = 0$

3. (a) $P(1) = 0$

$0 = 1 - 4 + 6 - k$

$K = 3$

(b) $P(-1)= (-1)^3 - 4x\ (-1)^2 + 6x\ (-1) - 3$

$= -1 - 4 - 6 - 3$

$= 14 \neq 0$

x + 1 ഘടകമല്ല.

(c) $P(1) = 1 - 4 + 6 - 3 = 7 - 7 = 0$

ഗുണോത്തരങ്ങളുടെ തുക = 0

(d) $P(x) = x - 1$

$P(x) = x^2 - 2x + 1$

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

4. (a) $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$

   (b) $x^2 + 14x + 48 = (x + 8)(x + 6)$

   (c) $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$

അദ്ധ്യായം 11
സ്ഥിതി വിവരക്കണക്ക്

പ്രധാന ആശയങ്ങൾ

- ഒരു കൂട്ടം അളവുകളെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന ഒരു സംഖ്യയാണ് അവയുടെ ശരാശരി.
- **മാധ്യം**

  ഒരു കൂട്ടം അളവുകളുടെ തുകയെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ അവയുടെ മാധ്യം കിട്ടുന്നു.

  മാധ്യം = $\frac{\text{തുക}}{\text{എണ്ണം}}$

- **മറ്റൊരു ശരാശരി - മധ്യമം**

  ഒരു കൂട്ടം അളവുകളെ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ എഴുതുമ്പോൾ നടുക്ക് വരുന്ന അളവാണ് മധ്യമം.

- അളവുകളുടെ എണ്ണം (n) ഒറ്റസംഖ്യയായാൽ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ാം സ്ഥാനത്തെ അളവാണ് മധ്യമം.

- അളവുകളുടെ എണ്ണം (n) ഇരട്ടസംഖ്യയായാൽ $\left(\frac{n}{2}\right)$ -ാം സ്ഥാനത്തെ അളവിന്റെയും $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ -ാം

  സ്ഥാനത്തെ അളവിന്റെയും മധ്യസ്ഥാനത്തെ അളവായിരിക്കും മധ്യമം.

ആവൃത്തിപട്ടികയും മധ്യമവും

- ആവൃത്തികളുടെ തുകയുടെ പകുതി കാണുക.
- ഈ പകുതി സംഖ്യ ഉൾപ്പെടുന്ന വിഭാഗം കാണുക
- ഈ വിഭാഗത്തെ അതിന് സമാനമായ ആവൃത്തി കൊണ്ട് വിഭജിച്ച് സമഭാഗങ്ങളാക്കുക.
- വിഭാഗത്തിലെ ഓരോ ആവൃത്തിയും ഈ സമഭാഗങ്ങളുടെ നടുക്കായിരിക്കും എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.
- മധ്യസ്ഥാന അളവുകൾ സമാന്തര ശ്രേണിയിലായിരിക്കും.
- പൊതുവ്യത്യാസം എന്നത് ഒരു ഉപവിഭാഗ ദൈർഘ്യമായിരിക്കും.

- ഇതിൽ നിന്നും പകുതി ആവൃത്തിക്ക് സമാനമായ അളവ് കണ്ടെത്തുക.
- ഇതാണ് ഈ ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ മധ്യമം.

2 മാർക്ക് ചോദ്യങ്ങൾ

1. ഒരു ക്ലാസ്സിലെ 10 കുട്ടികൾക്ക് ഒരു പരീക്ഷയിൽ കിട്ടിയ സ്കോറുകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.
   11, 35, 32, 33, 39, 45, 41, 49, 48, 47
   (a) സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം കണക്കാക്കുക.
   (b) മധ്യമ സ്കോർ എത്രയാണ്?
2. ഒരു ക്ലാസ്സിലെ 7 കുട്ടികളുടെ സ്കോറുകൾ ചുവടെ നൽകുന്നു. 37, 43, 24, 42, 33, 44, 29 സ്കോറുകളുടെ മാധ്യവും മധ്യമവും കണക്കാക്കുക.
3. 10, 14, 17, 21, K എന്നീ സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം 16 ആയാൽ K എന്ന സംഖ്യ ഏത്?
4. 10, 15, 17, x, x + 2, 24, 29, 31 എന്നീ അളവുകൾ ആരോഹണക്രമത്തിലാണ്. ഇവയുടെ മധ്യമം 20 ആയാൽ x ന്റെ വില എത്ര?
5. ഒരു ക്ലാസ്സ് ഗ്രൂപ്പിലെ 10 കുട്ടികളുടെ മാർക്കിന്റെ മാധ്യം 13 ആണ്. ഈ ഗ്രൂപ്പിലേക്ക് 14, 12 മാർക്കുള്ള രണ്ട് കുട്ടികൾ കൂടി വന്നാൽ കുട്ടികളുടെ മാർക്കിന്റെ മാധ്യം എത്ര?

3. മാർക്ക് ചോദ്യങ്ങൾ

1. ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ ഉയരം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. മധ്യമ ഉയരം കാണുക.

ഉയരം (സെ.മീ.)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
140	4
145	7
150	18
155	11
160	6
165	5

2. ഒരു പ്രദേശത്തെ കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പട്ടിക താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

മാസവരുമാനം (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
6000	6
7000	7
8000	8
9000	9
10000	10
15000	5
20000	4
25000	3

മാസവരുമാനത്തിന്റെ മധ്യമം കാണുക.

3. ഒരു തൊഴിൽ ശാലയിൽ പലതരം ജോലി ചെയ്യുന്നവരുടെ എണ്ണം ദിവസക്കൂലി അനുസരിച്ച് പട്ടികയായി കൊടുത്തിരിക്കുന്നു,

ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
500	5
600	6
700	8
800	5
900	4
1000	3

ദിവസക്കൂലിയുടെ മധ്യമം കാണുക?

5. മാർക്ക് ചോദ്യങ്ങൾ

1. ഒരു സമിതിയിലെ 35 പേരുടെ വയസ്സുകൾ അടിസ്ഥാനമാക്കി തരംതിരിച്ച പട്ടിക ചുവടെ ചേർക്കുന്നു..

വയസ്സ്	അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം
20 - 30	4
30 - 40	8
40 - 50	10
50 - 60	7
60 - 70	4
70 - 80	2

(a) വയസ്സ് കൂടുന്നതിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ അംഗങ്ങളെ ക്രമപ്പെടുത്തിയാൽ എത്രാമത്തെ അംഗത്തിന്റെ വയസ്സാണ് മധ്യമം.

(b) 13 -ാം സ്ഥാനത്തെ അംഗത്തിന്റെ വയസ്സ് എത്രയായിട്ടാണ് സങ്കൽപ്പിക്കുന്നത്?

(c) മധ്യമം ആയ വയസ് കണക്കാക്കുക.

2. 10-ാം ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ അവരുടെ ശരീരഭാരമനുസരിച്ച് ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നു,

ഭാരം (kg)	എണ്ണം
30 - 35	3
35 - 40	15
40 - 45	5
45 - 50	9
50 - 55	6
55 - 60	3

(a) മധ്യമഭാരം എന്നത് എത്രാമത്തെ കുട്ടിയുടെ ഭാരമാണ്?

(b) ഭാരത്തിന്റെ ഏത് വിഭാഗത്തിലാണ് മധ്യമഭാരം ഉൾപ്പെടുക.

(c) മധ്യമഭാരം ഉൾപ്പെട്ട വിഭാഗത്തിൽ എത്ര കുട്ടികൾ ഉണ്ട്?

(d) മധ്യമഭാരം കാണുക.

3. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ തൊഴിലാളികളുടെ ദിവസവേതനങ്ങൾ ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ കൊടുക്കുന്നു.

ദിവസവേതനം (രൂപ)	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
300- 400	5
400-500	7
500 - 600	8
600 - 700	10
700 - 800	13
800 - 900	7
900 - 1000	3

(a) വേതനം കൂടുന്നതിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തൊഴിലാളികളെ ക്രമപ്പെടുത്തിയാൽ എത്രാമത്തെ തൊഴിലാളിയുടെ ദിവസവേതനമാണ് മധ്യമമായി വരുന്നത്?

(b) 21-ാമത്തെ തൊഴിലാളിയുടെ ദിവസവേതനം എത്രയായിട്ടാണ് സങ്കൽപ്പിക്കുന്നത്?

(c) മധ്യമമായ ദിവസവേതനം കാണുക.

ഉത്തരങ്ങൾ (2 മാർക്ക്)

1. (a) മാധ്യം $= \dfrac{11+35+32+33+39+45+41+49+48+47}{10}$

$$= \frac{380}{10} = 38$$

(b) വലുപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ

11, 32, 33, 35, **39, 41**, 45, 47, 48, 49

മധ്യമം $= \dfrac{39+41}{2} = \dfrac{80}{2} = 40$

2.(a) മാധ്യം $= \frac{37+43+24+42+33+44+29}{7}$

$$= \frac{252}{7} = 36$$

(b) വലുപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ

24, 29, 33, **37**, 42, 43, 44

മധ്യമം = 37

3. $\frac{10+14+17+21+K}{5} = 16$

$$\frac{62+K}{5} = 16$$

$$62 + K = 80$$

$$K = 80 - 62 = 18$$

4. $\frac{x+x+2}{2} = 20$

$$2x + 2 = 40$$

$$2x = 38$$

$$x = 19$$

5. മാധ്യം = $\frac{\text{തുക}}{\text{എണ്ണം}}$

$$\frac{\text{തുക}}{10} = 13$$

തുക = 130

14, 12 മാർക്കുള്ള രണ്ട് കുട്ടികൾ കൂടി വന്നാൽ, തുക = 130 + 14 + 12 = 156

മാധ്യം $= \frac{156}{12} = 13$

3 മാർക്ക് ഉത്തരങ്ങൾ

ഉയരം (സെ.മീ.)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	ഉയരം	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
140	4	140 വരെ	4
145	7	145 വരെ	11
150	18	150 വരെ	29
155	11	155 വരെ	40
160	6	160 വരെ	46
165	5	165 വരെ	51

ആകെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം = 51

മധ്യമ ഉയരം = $\left(\frac{51+1}{2}\right)$ -ാമത്തെ കുട്ടിയുടെ ഉയരം

=26 -ാമത്തെ കുട്ടിയുടെ ഉയരം = 150 cm

2.

മാസവരുമാനം (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	മാസവരുമാനം	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
6000	6	6000 വരെ	6
7000	7	7000 വരെ	13
8000	8	8000 വരെ	21
9000	9	9000 വരെ	30
10000	10	10000 വരെ	40
15000	5	15000 വരെ	45
20000	4	20000 വരെ	49
25000	3	25000 വരെ	52

ആകെ ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം = 52

മധ്യമവരുമാനം

=26-ാമത്തെയും 27-ാമത്തെയും ജോലിക്കാരുടെ മാസവരുമാനത്തിന്റെ ശരാശരി = 9000

3.

ദിവസക്കൂലി	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	ദിവസക്കൂലി	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
500	5	500 വരെ	5
600	6	600 വരെ	11
700	8	700 വരെ	19
800	5	800 വരെ	24
900	4	900 വരെ	28
1000	3	1000 വരെ	31

ദിവസക്കൂലിയുടെ മധ്യമം = $\left(\frac{31+1}{2}\right)$-ാമത്തെ ജോലിക്കാരന്റെ ദിവസക്കൂലി

= 16-മത്തെ ജോലിക്കാരന്റെ ദിവസക്കൂലി

= 700

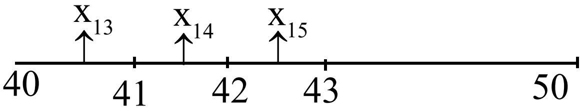
5 മാർക്ക് (ഉത്തരങ്ങൾ)

1.

വയസ്സ്	അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം
30 ൽ താഴെ	4
40 ൽ താഴെ	12
50 ൽ താഴെ	22
60 ൽ താഴെ	29
70 ൽ താഴെ	33
80 ൽ താഴെ	35

(a) $\frac{35+1}{2} = \frac{36}{2} = 18$-ാംമത്തെ അംഗത്തിന്റെ വയസ്

(b) 40-50 വിഭാഗത്തിന്റെ 10 ഭാഗങ്ങളാക്കിയാൽ ഓരോന്നും ഈ ഉപഭാഗങ്ങളുടെ മധ്യത്തിൽ ആയിരിക്കും. 13-ാം സ്ഥാനത്തെ അംഗത്തിന്റെ വയസ്സ് = 40 നും 41 മധ്യേ



$$x_{13} = \frac{40+41}{2} = 40.5$$

(c) മധ്യമം ആയ വയസ് = 18 -ാമത്തെ ആളുടെ വയസ് = $x_{13} + 5d$

$= 40.5 + 5 \times 1$

$= 45.5$

2.

ഭാരം	എണ്ണം
35 ൽ താഴെ	3
40 ൽ താഴെ	18
45 ൽ താഴെ	23
50 ൽ താഴെ	32
55 ൽ താഴെ	38
60 ൽ താഴെ	41

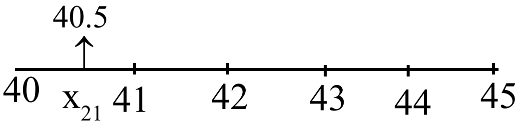
(a) 21- ാമത്തെ കുട്ടിയുടേത്

(b) 40 – 45

(c) 5 കുട്ടികൾ

(d) മധ്യമഭാരം = 21-ാമത്തെ കുട്ടിയുടെ ഭാരം

പൊതുവ്യത്യാസം (d) = $\frac{45-40}{5} = 1$



മധ്യമഭാരം = $(x_{21}) = \frac{40+41}{2} = 40.5$

3.

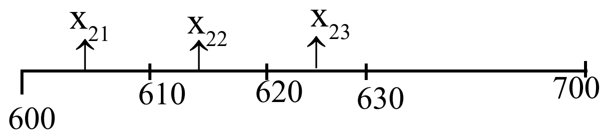
ദിവസവേതനം	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
400 ൽ താഴെ	5
500 ൽ താഴെ	12
600 ൽ താഴെ	20
700 ൽ താഴെ	30
800 ൽ താഴെ	43
900 ൽ താഴെ	50
1000 ൽ താഴെ	53

(a) $\left(\frac{53+1}{2}\right)$-ാമത്തെ തൊഴിലാളിയുടെ വേതനം = 27-ാമത്തെ തൊഴിലാളിയുടെ വേതനം.

(600 നും 700 നും ഇടയിൽ 10 തൊഴിലാളികൾ ഉണ്ട്.

$\therefore$ 10 തുല്യഭാഗങ്ങൾ ആക്കണം. ഒരുഭാഗം $\frac{100}{10} = 10$)

(b) $d = 10$



$$x_{21} = \frac{600+610}{2} = 605$$

(c) മധ്യമം $= x_{27} = x_{21} + 6d = 605 + 60$

$= 665$ Rs.

സ്വയം ചെയ്ത് നോക്കുക.

1. ഒരു സ്കൂളിലെ 14 ക്ലാസ്സുകളിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

   55, 35, 48, 52, 39, 48, 51, 62, 59, 36, 47, 50, 43, 33

   (a) എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

   (b) എണ്ണത്തിന്റെ മധ്യമം കാണുക.

2. ഒരു സ്കൂളിലെ ആർട്സ് ക്ലബ്ബിലെ അംഗങ്ങൾ വരച്ച ചിത്രങ്ങളുടെ എണ്ണങ്ങൾ താഴെ കൊടുക്കുന്നു.

   15, 39, 31, 42, 27, 33, 24, 18, 36, 21, 40 എണ്ണത്തിന്റെ മധ്യമം കാണക.

3. ഒരു പരീക്ഷ എഴുതിയ 50 കുട്ടികൾക്ക് കിട്ടിയ സ്കോർ പട്ടികപ്പെടുത്തിയത് ഇങ്ങനെയാണ്.

സ്കോർ	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
10 ൽ താഴെ	3
20 ൽ താഴെ	7
30 ൽ താഴെ	13
40 ൽ താഴെ	22
50 ൽ താഴെ	32
60 ൽ താഴെ	40
70 ൽ താഴെ	46
80 ൽ താഴെ	50

   സ്കോറിന്റെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

4. ഒരു ക്ലാസ്സിലെ കുട്ടികൾക്ക് ഒരു പരീക്ഷയ്ക്ക് കിട്ടിയ സ്കോറുകൾ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

സ്കോർ	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
0 - 10	5
10 -20	8
20 - 30	10
30 - 40	13
40 - 50	9
ആകെ	**45**

(a) കുട്ടികളുടെ സ്കോറുകളുടെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ ക്രമീകരിച്ചാൽ 14-ാമത്തെ കുട്ടിയുടെ സ്കോർ സങ്കൽപ്പ പ്രകാരം എത്രയാണ്?

(b) മധ്യമ സ്കോർ കണക്കാക്കുക.

5. ഒരു പരീക്ഷ എഴുതിയ കുട്ടികളെ മാർക്കിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. മധ്യമ മാർക്ക് കാണുക.

മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
10	4
20	7
30	10
40	12
50	8