HALF YEARLY EXAM - 2022

அரையாண்டுத் தேர்வு - 2022

வகுப்பு : XII   பாடம் - Mathematics

A.K. RAJADHURAI - TIRUVALLUR DIST

1) a) $\frac{\pi}{6}$ 2) c) $-\frac{1}{2}, -2$ 3) a) $(0, -\frac{1}{8})$ 4) a) $2ab$

5) d) $\tan^{-1}(\frac{1}{2})$ 6) $|k| \geq 6$ 7) b) $\frac{-1}{i+2}$ 8) c) 1

9) b) -80 10) c) $adj(adj A) = |A|^{n} A$ 11) c) N

12) d) $(\neg p \wedge \neg q) \to (\neg p \vee \neg q)$ 13) d) 2

14) a) 2, 3   15) c) $\sin x$ 16) a) 0   17) d) $\frac{2}{27}$

18) b) $2xu$ 19) b) $t = \frac{1}{3}$ 20) $\frac{\pi}{2}$

பகுதி - 2

II

21)
$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A^{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$AA^{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{T} = I$$

$\therefore$ A ஒரு ஒழுங்கு அணி.

$\therefore$ A is orthogonal.

22)

$$\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

---

23)

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1-1+2i}{1+1} = i$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{1}{i} = -i$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = i^3 - (-i)^3 = i^3 + i^3$$

$$= 2i^3 = 2(-i) = -2i$$

---

24)

$$P(x) = 9x^9 - 4x^8 + 4x^7 - 3x^6 + 2x^5 + x^3 + 7x^2 + 7x + 2$$

குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை = 4.

அதிகபட்ச மிகை எண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை = 4.

$$P(-x) = -9x^9 - 4x^8 - 4x^7 - 3x^6 - 2x^5 - x^3 + 7x^2 - 7x + 2$$

குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை = 3

அதிகபட்ச குறை எண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை = 3

---

25)

$$[\vec{a}+\vec{c},\ \vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

$$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

26)

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f(x_0) = f(27) = (27)^{\frac{1}{3}} = 3$$

$$f'(x_0) = f'(27) = \frac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27}$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$L(x) = 3 + \frac{1}{27}(x - 27) = \frac{x}{27} + 2$$

$$\sqrt[3]{27.2} \simeq L(27.2)$$

$$\simeq \frac{27.2}{27} + 2 \simeq 1.0074 + 2$$

$$\sqrt[3]{27.2} \simeq 3.0074.$$

---

27)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x \, dx = \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{945\pi}{7680} = \frac{189\pi}{1536} = \frac{63\pi}{512}$$

---

28)

$f(x) = e^x$ $\qquad$ $f(0) = 1$

$f'(x) = e^x$ $\qquad$ $f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x$ $\qquad$ $f''(0) = 1$

மெக்லாரின் தொடர்:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

29)

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

30)

$$xy = ae^{x} + be^{-x} + x^{2} \quad \text{—} \; (1)$$

Diff, வகையிட,

$$xy' + y = ae^{x} - be^{-x} + 2x$$

மீண்டும் வகையிட, Again Diff,

$$xy'' + y' + y' = ae^{x} + be^{-x} + 2$$

(1) லிருந்து, From (1)

$$xy'' + 2y' = xy - x^{2} + 2$$

$$xy'' + 2y' - xy + x^{2} - 2 = 0.$$

பகுதி - இ

31) $6-8i$ ன் வர்க்கமூலம், Square root of $6-8i$

$$|6-8i| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$$

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$$

$$\sqrt{6-8i} = \pm\left(\sqrt{\frac{10+6}{2}} + i\frac{-8}{8}\sqrt{\frac{10-6}{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\sqrt{8} - i\sqrt{2}\right) = \pm\left(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$$

α, β are the roots of $2x^2 - 7x - 13 = 0$.

32) $2x^2 - 7x - 13 = 0$ ன் மூலங்கள் α, β.

$$\alpha + \beta = \frac{7}{2} \qquad \alpha\beta = \frac{-13}{2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-13}{2}\right)$$

$$= \frac{49}{4} + 13 = \frac{101}{4}$$

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{169}{4}$$

தேவையான இருபடிச் சமன்பாடு, Quadratic equation

$$x^2 - (\alpha^2+\beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{101}{4}x + \frac{169}{4} = 0$$

$$4x^2 - 101x + 169 = 0$$

---

33) $$\sin^{-1}\left(\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

34) The equation of the hyperbola

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$2ae = 6$

$ae = 3$

$a(2) = 3$

$\boxed{a = \frac{3}{2}}$

Centre மையம் $(h, k) = (0, 5)$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-5)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 = a^2(e^2-1)$$

$$= \frac{9}{4}(2^2-1)$$

$$= \frac{9}{4}(3)$$

$$\boxed{b^2 = \frac{27}{4}}$$

அதிபரவளைய சமன்பாடு

$$\frac{4x^2}{9} - \frac{4(y-5)^2}{27} = 1$$

35)

$$2x = 3y = -z$$

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{-1}$$

$$(b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -1\right)$$

$$6x = -y = -4z$$

$$\frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-\frac{1}{4}}$$

$$(d_1\ d_2\ d_3) = \left(\frac{1}{6}, -1, -\frac{1}{4}\right)$$

இக்கோடுகளுக்கு இடையே கோணம்

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{d}}{|\vec{b}||\vec{d}|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+1}\sqrt{\frac{1}{36}+1+\frac{1}{16}}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\frac{0}{12}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+1}\sqrt{\frac{1}{36}+1+\frac{1}{16}}}\right)$$

$$= \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

36) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \infty - \infty$ தேறப்பெறாத வடிவம்

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x} \right) = \frac{0}{0}$ "

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த

$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x + \sin x} = \frac{0}{0}$ தேறப்பெறாத வடிவம்

மீண்டும் லோபிதாலின் விதியைப் பயன்படுத்த

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x(-\sin x) + \cos x + \cos x} = \frac{0}{2} = 0$

---

37) $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$

$= \left[\log(1+x^2) \right]_0^1$

$= \log 2 - \log 1$

$= \log 2$

---

38) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sin^{-1}(y) = \sin^{-1}(x) + C$

39) சராசரி $np = 2$

பரவற்படி $npq = 1.5$

$$\frac{npq}{np} = \frac{1.5}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{q = 3/4} \qquad p = 1 - q = 1 - 3/4 = 1/4$$

$$\boxed{p = 1/4}$$

$$n\left(1/4\right) = 2$$

$$\boxed{n = 8}$$

$$P(X = x) = \binom{8}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{8-x}$$

$$P(X = 0) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{8} = \left(3/4\right)^{8}$$

---

40)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ \lambda & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ \lambda & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 - 2\lambda & 10 \\ -5\lambda & -2\lambda + 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \lambda A - 2I$$

$$\begin{pmatrix} 9 - 2\lambda & 10 \\ -5\lambda & -2\lambda + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda & -2\lambda \\ \lambda^2 & -2\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 - 2\lambda & 10 \\ -5\lambda & -2\lambda + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda - 2 & -2\lambda \\ \lambda^2 & -2\lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$-2\lambda = 10 \Rightarrow \boxed{\lambda = -5}$$

VB - நி.

41) a)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 2 & 3 & \lambda & \mu \end{array}\right]$$

$R_3 \to R_3 - R_1$
$R_2 \to 2R_2 - 7R_1$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & -15 & -45 & -47 \\ 0 & 0 & \lambda-5 & \mu-9 \end{array}\right]$$

இது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது

It is in echelon form

Case (i) $\lambda = 5, \ \mu \neq 9$

$$\rho(A) = 2 \qquad \rho(A|B) = 3$$

$$\rho(A) \neq \rho(A|B)$$

பொருந்தாது தீர்வு பெறாது. No solution.

Case (ii) $\lambda \neq 5, \ \mu \in R$

$$\rho(A) = 3 \qquad \rho(A|B) = 3$$

$$\rho(A) = \rho(A|B) = 3 = 3 \ \text{([illegible])}$$

ஒரே ஒரு தீர்வை பெறுகிறது.

a unique solution.

Case (iii) $\lambda = 5, \ \mu = 9$

$$\rho(A) = \rho(A|B) = 2 < 3 \ \text{([illegible])}$$

$\therefore$ எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெறுகிறது.

An infinite number of solutions.

41) b) $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$

$$x^2\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26\right] = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0$$

Let $y = x + \frac{1}{x}$ எனின். $\Rightarrow$ $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$$(y^2 - 2) - 10y + 26 = 0$$

$$y^2 - 10y + 24 = 0$$

$$(y-6)(y-4) = 0$$

$$y = 6, \quad y = 4$$

<u>Case (i)</u> If $y = 6$ எனில் $x + \frac{1}{x} = 6$

$\Rightarrow x = 3 + 2\sqrt{2}$

$x = 3 - 2\sqrt{2}$

<u>Case (ii)</u> If $y = 4$ எனில் $x + \frac{1}{x} = 4$

$\Rightarrow x = 2 + \sqrt{3}$

$x = 2 - \sqrt{3}$.

<u>தீர்வுகள்</u>: <u>Solutions</u>

$3 \pm 2\sqrt{2}, \quad 2 \pm \sqrt{3}$.

---

42) a)

$$\frac{z - i}{z + 2} = \frac{x + iy - i}{x + iy + 2} = \frac{x + i(y-1)}{(x+2) + iy}$$

$$= \frac{x + i(y-1)}{(x+2) + iy} \times \frac{(x+2) - iy}{(x+2) - iy}$$

$$\frac{z - i}{z + 2} = \frac{x(x+2) - ixy + i(y-1)(x+2) + y(y-1)}{(x+2)^2 + y^2}$$

$$\frac{z-i}{z+2} = \frac{x(x+2)+y(y-1)+i\left[(y-1)(x+2)-xy\right]}{(x+2)^2+y^2}$$

$$\arg\left(\frac{z-i}{z+2}\right) = \tan^{-1}\frac{(y-1)(x+2)-xy}{x(x+2)+y(y-1)} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\cancel{xy}+2y-x+2-\cancel{xy}}{x^2+2x+y^2-y} = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$+2y-x+2 = x^2+2x+y^2-y$$

$$x^2+y^2+3x-3y+2=0$$

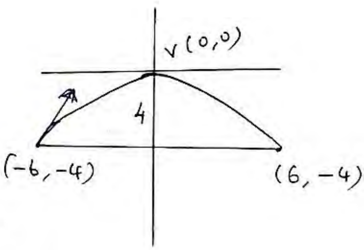
---

42)

b)

പരാബോളയുടെ സമവാക്യം

Equation of Parabola



$$x^2 = -4ay \quad \text{—} ①$$

It passes through (6, −4)

$$36 = -4a(-4) \Rightarrow 4a = 9$$

$$① \Rightarrow \quad x^2 = -9y \quad \text{—} ②$$

② നെ അവകലനം, Diff ② w.r.t x,

$$2x = -9\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{9}$$

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-6,-4)} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

But $m = \tan\theta$

$$\tan\theta = \frac{4}{3}$$

പ്രക്ഷേപണ കോൺ

The angle of Projection $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

43)

a)

$$(x_1, y_1, z_1) = (2, 3, 6)$$

$$(l_1, m_1, n_1) = (2, 3, 1)$$

$$(l_2, m_2, n_2) = (2, -5, -3)$$

Cartesian equation of plane is

தளத்தின் கார்ட்டீசியன் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(-4) - (y-3)(-8) + (z-6)(-16) = 0$$

$$\boxed{x - 2y + 4z - 20 = 0}$$

$\vec{r} \cdot (\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) = 20$ என்பது

துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும்.

It is the non-parametric vector equation.

---

(43) b)

$$\sum_x f(x) = 1$$

$$\therefore K + 2k + 6k + 5k + 6k + 10k = 1$$

$$30k = 1$$

$$\boxed{k = \frac{1}{30}}$$

x :	1	2	3	4	5	6
$f(x)$:	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{10}{30}$

(i) $P(2 < X < 6) = f(3) + f(4) + f(5)$

$$= \frac{6}{30} + \frac{5}{30} + \frac{6}{30} = \frac{17}{30}$$

(ii) $P(2 \le X < 5) = f(2) + f(3) + f(4)$

$$= \frac{2}{30} + \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{13}{30}$$

(iii) $P(X \le 4) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$

$$= \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{6}{30} + \frac{5}{30}$$

$$= \frac{14}{30}$$

(iv) $P(3 < X) = f(4) + f(5) + f(6)$

$$= \frac{5}{30} + \frac{6}{30} + \frac{10}{30} = \frac{21}{30}$$

---

44) a) The equation of the curves

[illegible] [illegible]

$y = x^2$ $\qquad\qquad$ $x = y^2$

$\frac{dy}{dx} = 2x$ $\qquad\qquad$ $1 = 2y\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

In the point $(0,0)$.

$$\tan\theta_1 = \left| \frac{2x - \frac{1}{2y}}{1 + (2x)\left(\frac{1}{2y}\right)} \right|$$

$$\tan\theta_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{2x - \frac{1}{2y}}{1 + (2x)\left(\frac{1}{2y}\right)} \right|$$

$$\tan\theta_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{4xy-1}{2(y+x)} \right|$$

$$\tan\theta_1 = \infty$$

$$\boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{2}}$$

In the point $(1,1)$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = 2(1) = 2$$

$$m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\theta_2 = \left| \frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\left(\frac{1}{2}\right)} \right| = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}$$

4(4) b) (H) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \tan^{-1}(z)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{x+y}{1-xy} + z}{1 - z\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{x+y+z-xyz/_{1-xy}}{1-xy-zx-yz/_{1-xy}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right) = \text{RHS}$$

45) a)

$$u = \sin^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$$

$$f(x,y) = \sin u = \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$f(tx,ty) = \frac{tx+ty}{\sqrt{t}\sqrt{x}+\sqrt{t}\sqrt{y}} = t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$f(tx,ty) = t^{\frac{1}{2}} \cdot f(x,y)$$

f ஆனது படி $\frac{1}{2}$ உடைய சமபடித்தான சார்பு.

ஆய்லரின் தேற்றப்படி, By Euler's theorem

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot f$$

$$x\frac{\partial}{\partial x}(\sin u) + y\frac{\partial}{\partial y}(\sin u) = \frac{1}{2}\sin u$$

$$x\cos u\frac{\partial u}{\partial x} + y\cos u\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin u$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\tan u$$

---

45) b)

$$Z_5 = \{[0]\,[1]\,[2]\,[3]\,[4]\}$$

மீதிகளின் கணம் $\{0,1,2,3,4\}$

$\{[0]\,[1]\,[2]\,[3]\,[4]\}$ எனும் தொகுப்பு

இணைவகுப்புகளைக் குறிக்கிறது.

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

(i) அடைவுப் பண்பு:

அட்டவணையில் எல்லா உறுப்புகளும் Z_5-ன் உறுப்புகள்

∴ $+_5$ ஆனது Z_5 ன் மீது அடைவு உடையது.

(ii) பரிமாற்றுப் பண்பு:

அட்டவணையில் உள்ள பதிவுகள் முதன்மை மூலைவிட்டத்துடன் சமச்சீராக உள்ளதால் $+_5$ ஆனது பரிமாற்று பண்பு உடையது

(iii) சேர்ப்பு பண்பு

$$2, 3, 4 \in Z_5$$

$$(2 +_5 3) +_5 4 = 0 +_5 4 = 4 \ (\text{மட்டு } 5)$$

$$2 +_5 (3 +_5 4) = 2 +_5 2 = 4 \ (\text{மட்டு } 5)$$

$$(2 +_5 3) +_5 4 = 2 +_5 (3 +_5 4)$$

இதுபோல், எல்லா மூன்று உறுப்புகளின் சேர்ப்பிற்கும் இது சரியாக இருக்கும்.

(iv) சமனி மற்றும் எதிர்மறை உறுப்பு

அட்டவணையிலிருந்து

சமனி உறுப்பு $0 \in Z_5$

0 ன் எதிர்மறை $0 \in Z_5$

1 ன் எதிர்மறை $4 \in Z_5$

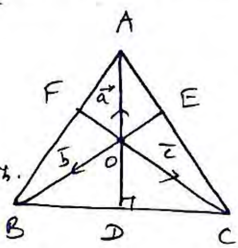
2 ன் எதிர்மறை $3 \in Z_5$

3 ன் எதிர்மறை $2 \in Z_5$

4 ன் எதிர்மறை $1 \in Z_5$

---

46) a)



ΔABC ல்,

$\vec{AD}, \vec{BE}$ என்ற குத்துக்

கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி O என்க.

$\vec{OA} = \vec{a}$

$\vec{OB} = \vec{b}$

$\vec{OC} = \vec{c}$

$\vec{AD} \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{OA} \perp \vec{BC}$

$\vec{OA} \cdot \vec{BC} = 0$

$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ —— (1)

$\vec{BE} \perp \vec{CA} \Rightarrow \vec{OB} \perp \vec{CA}$

$\vec{OB} \cdot \vec{CA} = 0$

$\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ —— (2)

① + ② ⇒

$$\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$$

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0$$

$$\vec{OC}\cdot\vec{BA} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{OC} \perp \vec{BA}$$

$$\Rightarrow \vec{CF} \perp \vec{BA}.$$

∴ முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்கின்றன.

---

b) நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$4x^2 + 24x + y^2 - 2y + 21 = 0$$

$$4(x^2 + 6x + 9 - 9) + (y^2 - 2y + 1 - 1) + 21 = 0$$

$$4(x+3)^2 - 36 + (y-1)^2 - 1 + 21 = 0$$

$$4(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16$$

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

Centre மையம் $(-3, 1)$ $a = 4,\ b = 2$

நெட்டச்சு y-அச்சுக்கு இணை.

$$c^2 = 16 - 4 = 12$$

$$c = \pm 2\sqrt{3}$$

குவியங்கள் $(-3,\ 2\sqrt{3}+1)$ $(-3,\ -2\sqrt{3}+1)$

முனைகள் $(-3,\ \pm 4 + 1) \Rightarrow (-3, 5)\ (-3, -3)$

செவ்வகல நீளம் $= \dfrac{2b^2}{a} = 2$ அலகுகள்

4) a)

$$I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\, dx$$

$$I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\, dx \quad \text{—} \ (1)$$

$$I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}-x\right)}}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}-x\right)}+\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}-x\right)}}\, dx$$

$$I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\, dx \quad \text{—} \ (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow$

$$2I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\, dx + \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\, dx$$

$$2I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} dx = \left[x\right]_{\pi/8}^{3\pi/8} = \frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{\pi}{8}$$

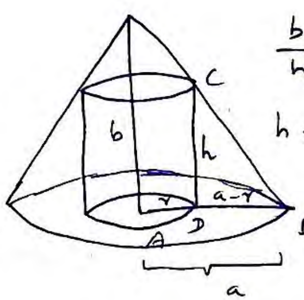
---

b) Volume of cylinder

2[illegible]

$V = \pi r^2 h$

$= \pi r^2 \frac{b}{a}(a-r)$



$$\frac{b}{h} = \frac{a}{a-r}$$

$$h = \frac{b}{a}(a-r)$$

$$V = \frac{\pi b}{a}(ar^2 - r^3) \quad \text{— ①}$$

$$V' = \frac{\pi b}{a}(2ar - 3r^2)$$

$$V'' = \frac{\pi b}{a}(2a - 6r)$$

Put $V' = 0$

$$\frac{\pi b}{a}(2ar - 3r^2) = 0$$

$$r(2a - 3r) = 0$$

$r = 0$	$2a - 3r = 0$
$r \neq 0$	$\boxed{r = 2a/3}$

At $r = \frac{2a}{3}$, $V'' = \frac{\pi b}{a}\left[2a - 6\left(\frac{2a}{3}\right)\right]$

$$V'' = \frac{\pi b}{a}(-2a) < 0$$

V attains maximum at $r = 2a/3$

$$① \Rightarrow \quad V = \frac{\pi b}{a}\left[a\,\frac{4a^2}{9} - \frac{8a^3}{27}\right]$$

$$V = \frac{\pi b}{a}\left(\frac{4a^3}{27}\right) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{3}\pi a^2 b$$

Volume of cylinder $= \frac{4}{9} \times$ volume of Cone

By

A K RAJADHURAI

MATHS TEACHER

GGHSS - PODATURPET