1

സമവാക്യജോടികൾ

മനക്കണക്കും ബീജഗണിതവും

ആദ്യം തന്നെ ഒരു കണക്കാവാം:

> ഒരു ചെപ്പിൽ കറുപ്പും വെളുപ്പുമായി 100 മുത്തുകളുണ്ട്. വെളുപ്പിനേക്കാൾ 10 കൂടുതലാണ് കറുപ്പ്. കറുപ്പെത്ര ? വെളുപ്പെത്ര ?

പലതരത്തിൽ ആലോചിക്കാം. കൂടുതലുള്ള 10 കറുത്ത മുത്തുകൾ തൽക്കാലം മാറ്റിവച്ചാൽ, ചെപ്പിൽ 90 മുത്തുകൾ; ഇതിൽ കറുപ്പും വെളുപ്പും തുല്യം; അതായത് 45 വീതം. ഇനി മാറ്റിവച്ച കറുപ്പും കൂടിയെടുത്താൽ കറുപ്പ് 55 ആകും; വെളുപ്പ് 45 തന്നെ.

ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചും ചെയ്യാം (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **സമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠം). കറുത്ത മുത്തുകളുടെ എണ്ണം x എന്നെടുത്താൽ, വെളുത്ത മുത്തുകളുടെ എണ്ണം $x - 10$. എല്ലാംകൂടി 100 ആയതിനാൽ

$$x + (x - 10) = 100$$

ഇതിൽ നിന്ന് x മാത്രം വേർതിരിച്ചെടുക്കാം:

$$2x - 10 = 100$$

$$2x = 110$$

$$x = 55$$

അങ്ങനെ, കറുത്ത മുത്തുകൾ 55 എന്നു കിട്ടും; 10 കുറച്ച്, വെളുത്ത മുത്തുകൾ 45 എന്നും കാണാം.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

> ഒരു മേശയ്ക്കും കസേരയ്ക്കും കൂടി 11000 രൂപയാണ് വില. ഒരു മേശയ്ക്കും നാലു കസേരയ്ക്കും കൂടി 14000 രൂപയും. ഓരോന്നിന്റെയും വിലയെത്രയാണ് ?

ആദ്യം മനസ്സിൽത്തന്നെ ചെയ്യാമോ എന്നു നോക്കാം. ഒരു മേശയും നാലു കസേരയുമായപ്പോൾ, വില 3000 രൂപ കൂടി; ഇതിനു കാരണം, മൂന്നു കസേരകൂടി വാങ്ങുന്നതുകൊണ്ടല്ലേ ? അതായത്, മൂന്നു കസേരയുടെ വിലയാണ് കൂടുതൽ വന്ന 3000 രൂപ. അപ്പോൾ ഒരു കസേരയുടെ വില 1000 രൂപ, മേശയുടെ വില 10000 രൂപ.

ഇങ്ങനെയൊന്നും ആലോചിക്കാതെ, കസേരയുടെ വില x രൂപ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം; ഇനി അല്പമൊന്നാലോചിച്ചാൽ, മേശയുടെ വില $11000 - x$ രൂപ എന്നു കാണാം; ഒരു മേശയും, നാലു കസേരയുമായാൽ, $(11000 - x) + 4x = 11000 + 3x$ രൂപ. ഇത് 14000 രൂപയാണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അതായത്,

$$11000 + 3x = 14000$$

ഇതിൽ നിന്ന് x കണക്കാക്കാം:

$$\begin{aligned} 11000 + 3x &= 14000 \\ 3x &= 3000 \\ x &= 1000 \end{aligned}$$

അങ്ങനെ കസേരയുടെ വില 1000 രൂപ എന്നു കിട്ടും; മേശയുടെ വില $11000 - 1000 = 10000$ രൂപയെന്നും.

മറ്റൊരു രീതിയിൽ കസേരയുടെ വില x രൂപ, മേശയുടെ വില y രൂപ എന്നെടുത്തും തുടങ്ങാം. അപ്പോൾ കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാക്കാം.

$$\begin{aligned} x + y &= 11000 \\ 4x + y &= 14000 \end{aligned}$$

ഇനി ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽ x, y എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ബന്ധം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$$y = 11000 - x$$

അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലെ y യ്ക്കു പകരം $11000 - x$ ഉപയോഗിക്കാം:

$$4x + (11000 - x) = 14000$$

അതായത്

$$11000 + 3x = 14000$$

ഇത് കസേരയുടെ വില മാത്രം x എന്നെടുത്തു കിട്ടിയ പഴയ സമവാക്യം തന്നെയല്ലേ ?

ഇതിൽ നിന്ന് ആദ്യത്തെപ്പോലെ വില രണ്ടും കണക്കാക്കാം.

മറ്റൊരു കണക്ക്;

> രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ വലുത്, ചെറുതിന്റെ 5 മടങ്ങാണ്; വലുതിൽ നിന്നു ചെറുതു കുറച്ചാൽ 32. സംഖ്യകൾ എന്താണ് ?

മനസ്സിൽത്തന്നെ കണക്കു കൂട്ടാമോ ?

വലിയ സംഖ്യ, ചെറിയ സംഖ്യയുടെ അഞ്ചു മടങ്ങാണല്ലോ. അപ്പോൾ, വലിയ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് ചെറുതു കുറയ്ക്കുക എന്നത് മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞുകൂടേ ?

ചെറിയ സംഖ്യയുടെ അഞ്ചു മടങ്ങിൽ നിന്ന് ആ സംഖ്യ തന്നെ കുറയ്ക്കുക; അതായത് സംഖ്യയുടെ നാലു മടങ്ങ്.

ഇങ്ങനെ കുറച്ചുകിട്ടുന്നത് 32 എന്നാണല്ലോ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. അപ്പോൾ ചെറിയ സംഖ്യയുടെ 4 മടങ്ങ് 32. സംഖ്യ 8.

ഇനി വലിയ സംഖ്യ 8 ന്റെ 5 മടങ്ങ്, 40.

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചാലോ ?

ചെറിയ സംഖ്യ x എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം. അപ്പോൾ വലിയ സംഖ്യ $5x$

വലുതിൽനിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചാൽ $5x - x = 4x$

കുറച്ചുകിട്ടുന്നത് 32 ആയതിനാൽ $4x = 32$

ഇതിൽനിന്ന് $x = 8$ എന്നു കിട്ടുമല്ലോ.

അതായത്, ചെറിയ സംഖ്യ 8, വലിയ സംഖ്യ $5 \times 8 = 40$

ചെറിയ സംഖ്യ x, വലിയ സംഖ്യ y എന്നെടുത്തു തുടങ്ങിയാലോ ?

പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങൾ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതാം.

$$y = 5x$$

$$y - x = 32$$

രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലെ y ക്കു പകരം $5x$ ഉപയോഗിച്ചാലോ ?

$$5x - x = 32$$

അതായത്,

$$4x = 32$$

ഇതിൽ നിന്ന് $x = 8$ എന്നും, തുടർന്ന് $y = 5 \times 8 = 40$ എന്നും കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഒരു കണക്കുകൂടി:

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ $\frac{1}{2}$ കിട്ടി. ഛേദത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയത് $\frac{1}{3}$ ഉം. ഏതാണ് ഭിന്നസംഖ്യ ?

ഇത് മനക്കണക്കായി ചെയ്യാനാകുമോ ?

അംശമോ ഛേദമോ x എന്നു മാത്രമെടുത്താലും ഏറെയൊന്നും മുന്നോട്ട് പോകില്ല. അംശം x ഉം ഛേദം y ഉം എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം.

അപ്പോൾ ഭിന്നസംഖ്യ $\frac{x}{y}$.

ഇനി കണക്കിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങളോരോന്നും സമവാക്യങ്ങളാക്കാം:

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$$

ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിന്റെ അർഥം എന്താണ് ?

$\frac{x+1}{y}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യ, $\frac{1}{2}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യയുടെ മറ്റൊരു രൂപമാണ്.

$\frac{1}{2}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യയുടെ പല പല രൂപങ്ങളിലെല്ലാം, ഛേദം അംശത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാകണ്ടേ ?

അപ്പോൾ, ഛേദമായ y അംശമായ $x+1$ ന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. അതായത്

$$y = 2(x+1)$$

ഇതുപോലെ, രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യം $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$ എന്നതിൽ നിന്ന്

$$y + 1 = 3x$$

എന്നു കിട്ടും

ആദ്യത്തെ സമവാക്യം പറയുന്നത് y എന്ന സംഖ്യയും $2(x+1)$ എന്ന സംഖ്യയും തുല്യമാണെന്നാണ്; അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലെ y ക്കു പകരം $2(x+1)$ എഴുതാം:

$$2(x+1)+1 = 3x$$

അതായത്,

$$2x+2+1 = 3x$$

$$2x+3 = 3x$$

ഇതിൽ നിന്ന് $x = 3$ എന്നു കാണാം; തുടർന്ന് ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന്

$y = 2 \times (3+1) = 2 \times 4 = 8$ എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ $\frac{3}{8}$ ആണ് ഈ കണക്കിലെ ഭിന്നസംഖ്യ.

ഇനി ചുവടെപ്പറയുന്ന കണക്കുകളോരോന്നും മനക്കണക്കായോ, ഒരക്ഷരം മാത്രമുള്ള സമവാക്യമാക്കിയോ, രണ്ടക്ഷരമുള്ള രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാക്കിയോ ചെയ്യുക :

(1) പ്രിയ 1100 രൂപ കൊടുത്ത് ബാഗും ചെരുപ്പും വാങ്ങി. ബാഗിന് ചെരുപ്പിനേക്കാൾ 300 രൂപ കൂടുതലാണ്. ചെരുപ്പിന്റെ വില എന്താണ് ? ബാഗിന്റെയോ ?

(2) രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക 26 ഉം, വ്യത്യാസം 4 ഉം ആണ്. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

(3) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 40 സെന്റിമീറ്റർ. ഒരു വശം മറ്റേ വശത്തേക്കാൾ 8 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്. വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

(4) മൂന്നര മീറ്റർ നീളമുള്ള കമ്പി രണ്ടായി മുറിച്ച്, ഒരു കഷണം വളച്ചൊരു സമചതുരവും, മറുകഷണം വളച്ചൊരു സമഭുജത്രികോണവുമുണ്ടാക്കണം; രണ്ടിന്റെയും വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമായിരിക്കണം. എങ്ങനെ മുറിക്കണം ?

(5) ഒരു ക്ലാസിൽ ആൺകുട്ടികളെക്കാൾ 4 പെൺകുട്ടികൾ കൂടുതലുണ്ട്. 8 ആൺകുട്ടികൾ മാത്രം വരാതിരുന്ന ഒരു ദിവസം, ആൺകുട്ടികളുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് പെൺകുട്ടികളായി. ക്ലാസിൽ എത്ര പെൺകുട്ടികളും എത്ര ആൺകുട്ടികളുമാണ് ?

(6) ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ $\frac{1}{3}$ കിട്ടി; ഛേദത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയത് $\frac{1}{4}$ ഉം. ഏതാണ് ഭിന്നസംഖ്യ ?

(7) ഒരാൾ 100000 രൂപ രണ്ടു പദ്ധതികളിലായി നിക്ഷേപിച്ചു. 7 ശതമാനവും, 6 ശതമാനവുമാണ് പലിശനിരക്ക്. ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞ് രണ്ടു പദ്ധതിയിൽ നിന്നുമായി 6750 രൂപ പലിശ കിട്ടി. ഓരോന്നിലും എത്ര രൂപയാണ് നിക്ഷേപിച്ചത് ?

(8) ഒരു സെക്കന്റിൽ u മീറ്റർ എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി, ഓരോ സെക്കന്റിലും a മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കൂടി, നേർവരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ t സെക്കന്റിലെ വേഗം $u + at$ ആണ്. ഇങ്ങനെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഒന്നാമത്തെ സെക്കന്റിലെ വേഗം 5 മീറ്റർ/സെക്കന്റും, അഞ്ചാമത്തെ സെക്കന്റിലെ വേഗം 13 മീറ്റർ/സെക്കന്റുമാണ്. ഓരോ സെക്കന്റിലേയും വേഗം കൂടുന്നതിന്റെ നിരക്ക് എന്താണ് ? യാത്രയുടെ തുടക്കത്തിലെ വേഗം എന്താണ് ?

രണ്ടു സമവാക്യങ്ങൾ

ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

2 പേനയ്ക്കും 3 നോട്ടുബുക്കിനും കൂടി 110 രൂപ. 2 പേനയ്ക്കും 5 നോട്ടുബുക്കിനുമാണെങ്കിൽ 170 രൂപ. ഒരു പേനയുടെ വില എത്രയാണ് ? ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെയോ ?

നേരത്തെ ചെയ്ത കസേര-മേശ കണക്കുപോലെ ആലോചിച്ചുനോക്കൂ: ആദ്യം പറഞ്ഞ 110 രൂപയിൽ നിന്ന്, വില 170 രൂപയായി കൂടിയതെങ്ങനെ ?

2 നോട്ടുബുക്ക് കൂടി വാങ്ങിയതുകൊണ്ടല്ലേ ?

അതായത്, 2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വിലയാണ് കൂടുതലായ 60 രൂപ. അപ്പോൾ ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 30 രൂപ.

ഇനി ആദ്യം പറഞ്ഞതിൽനിന്ന് 2 പേനയുടെ വില കിട്ടാൻ, 110 രൂപയിൽ നിന്ന് മൂന്നു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില കുറച്ചാൽപ്പോരേ ?

അതായത്, $110 - 90 = 20$ രൂപ. അപ്പോൾ ഒരു പേനയുടെ വില 10 രൂപ.

വിവരങ്ങളും പരിഹാരങ്ങളും

ഒരു ചെപ്പിൽ കറുപ്പും വെളുപ്പുമായി പത്തു മുത്തുകളുണ്ട് എന്നു മാത്രം പറഞ്ഞാൽ, കറുപ്പെത്ര, വെളുപ്പെത്ര എന്നു കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. കറുപ്പ് ഒന്നും വെളുപ്പ് ഒമ്പതും, കറുപ്പ് രണ്ടും വെളുപ്പ് എട്ടും ഇങ്ങനെ പല തരത്തിലാകാം. വെളുപ്പിനേക്കാൾ രണ്ടെണ്ണം കൂടുതലാണ് കറുപ്പ് എന്നും കൂടി പറഞ്ഞാൽ, കൃത്യമായിത്തന്നെ പറയാം. കറുപ്പ് ആറ്, വെളുപ്പ് നാല്.

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാൽ, $x + y = 10$ എന്ന ഒറ്റ സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ x, y അനേകമുണ്ടാകും. എന്നാൽ

$$x + y = 10$$

$$x - y = 2$$

എന്ന രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളും അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ ഒരു ജോടിയേ ഉള്ളൂ.

$$x = 6, \quad y = 4$$

ഇനി, പേനയുടെ വില x രൂപ, നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില y രൂപ എന്നെടുത്ത്, കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം ബീജഗണിതസമവാക്യങ്ങളാക്കി, ഇതു ചെയ്യുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം:

2 പേനയുടെയും 3 നോട്ടുബുക്കിന്റെയും വില 110 രൂപ	$2x + 3y = 110$
2 പേനയുടെയും 5 നോട്ടുബുക്കിന്റെയും വില 170 രൂപ	$2x + 5y = 170$
കൂടുതലായത് 2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില	$(2x + 5y) - (2x + 3y) = 2y$
കൂടുതലായത് 60 രൂപ	$170 - 110 = 60$
2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 60 രൂപ	$2y = 60$
ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 30 രൂപ	$y = 30$
2 പേനയുടെ വില, 110 രൂപയിൽ നിന്ന് 90 രൂപ കുറച്ചത്	$2x = 110 - (3 \times 30) = 20$
ഒരു പേനയുടെ വില 10 രൂപ	$x = 10$

അല്പം വ്യത്യസ്തമായ ഒരു കണക്കു നോക്കൂ:

3 പെൻസിലിനും 4 പേനയ്ക്കും കൂടി 66 രൂപയാണ് വില. 6 പെൻസിലിനും 3 പേനയ്ക്കുമാണെങ്കിൽ 72 രൂപയും. പെൻസിലിന്റേയും പേനയുടേയും വില എത്രയാണ് ?

ആദ്യം മനസ്സിൽ ചെയ്യാമോ എന്നു നോക്കാം. ഇവിടെ രണ്ടാമത്തെ വില കൂടാൻ കാരണം, ആദ്യത്തെ കണക്കുപോലെ, ഒരു സാധനം മാത്രം കൂടിയതു കൊണ്ടല്ല. അപ്പോൾ അതുപോലെ അത്ര എളുപ്പമല്ല ഇതിലെ കാര്യങ്ങൾ.

രണ്ടു വിവരങ്ങളിലും പെൻസിലോ, പേനയോ ഒരേ എണ്ണമായിരുന്നെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ കണക്കുപോലെ ചെയ്യാമായിരുന്നു. അങ്ങനെയാക്കിയാലോ ?

വിലകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതിവയ്ക്കാം:

പെൻസിൽ	പേന	വില
3	4	66
6	3	72

ആദ്യം പറഞ്ഞതിൽ 3 പെൻസിലും രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതിൽ 6 പെൻസിലുമാണ്. ആദ്യത്തേതിലും 6 പെൻസിൽതന്നെ ആക്കാൻ പറ്റുമോ ?

6 പെൻസിലും, 8 പേനയുമായാലോ ?

	പെൻസിൽ	പേന	വില
	3	4	66
×2	6	3	72
	6	8	132

മൂന്നാമത്തെ വരിയിൽ രണ്ടാമത്തെ വരിയേക്കാൾ വില എത്ര കൂടി ?

എന്തുകൊണ്ട് ?

60 രൂപ കൂടിയത്, 5 പേനയുടെ മാത്രം വിലയല്ലേ ?

അപ്പോൾ, ഒരു പേനയുടെ വില 12 രൂപ. ഇനി ആദ്യത്തെ വരിയിൽ നിന്ന്, 3 പെൻസിലിന്റെ വില $66 - 48 = 18$ രൂപ. ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില 6 രൂപ എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

ഇനി ഈ ചിന്തകളെല്ലാം ബീജഗണിതത്തിലെഴുതിനോക്കാം. ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില x രൂപയെന്നും, ഒരു പേനയുടെ വില y രൂപയെന്നുമെടുത്താൽ, കണക്കിലെ വിവരങ്ങളും അതുപയോഗിച്ച് വിലകൾ കണ്ടുപിടിച്ച രീതിയുമെല്ലാം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

3 പെൻസിലിന്റെയും 4 പേനയുടെയും വില 66 രൂപ

$$3x + 4y = 66$$

6 പെൻസിലിന്റെയും 3 പേനയുടെയും വില 72 രൂപ

$$6x + 3y = 72$$

6 പെൻസിലിന്റെയും 8 പേനയുടെയും വില 132 രൂപ

$$6x + 8y = 2(3x + 4y) = 132$$

കൂടുതലായത് 5 പേനയുടെ വില

$$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 5y$$

കൂടുതലായത് 60 രൂപ

$$132 - 72 = 60$$

5 പേനയുടെ വില 60 രൂപ

$$5y = 60$$

ഒരു പേനയുടെ വില 12 രൂപ

$$y = 12$$

3 പെൻസിലിന്റെ വില, 66 രൂപയിൽ നിന്ന് 4 പേനയുടെ വില കുറച്ചത്

$$3x = 66 - (4 \times 12) = 18$$

ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില, 6 രൂപ

$$x = 6$$

ഈ ചെയ്തതെല്ലാം ചുരുക്കിയെഴുതാം. ആദ്യം കണക്കിൽ നിന്ന് കിട്ടിയ വിവരങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതാം. അവയെ 1-ാം സമവാക്യമെന്നും, 2-ാം സമവാക്യമെന്നും വിളിക്കാം:

$$3x + 4y = 66 \qquad (1)$$

$$6x + 3y = 72 \qquad (2)$$

വ്യത്യസ്തമല്ലാത്ത വിവരങ്ങൾ

രാമു 7 രൂപ കൊടുത്ത് ഒരു പെൻസിലും ഒരു പേനയും വാങ്ങി. അജു 4 പെൻസിലും 4 പേനയും വാങ്ങി; 28 രൂപയായി. ഈ വിവരങ്ങൾ വച്ചുകൊണ്ട് ഓരോന്നിന്റേയും വില കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഇവർ ശ്രമിച്ചു. പെൻസിലിന്റെ വില x എന്നെടുത്ത് ആദ്യം പറഞ്ഞതുപയോഗിച്ച് പേനയുടെ വില $7 - x$ എന്നാക്കി.

രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതുപയോഗിച്ച്

$$4x + 4(7 - x) = 28$$

എന്നെഴുതി. ഇതു ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയതോ ? $28 = 28$

ഇവിടെ, പെൻസിലിന്റെ വില x, പേനയുടെ വില y എന്നെടുത്തിരുന്നെങ്കിലോ ?

$$x + y = 7$$

$$4x + 4y = 28$$

രണ്ടാമതെഴുതിയ സമവാക്യത്തിനെ

$$4(x + y) = 28$$

എന്നാക്കിയാൽ വീണ്ടും

$$x + y = 7$$

എന്നു തന്നെയല്ലേ കിട്ടുന്നത് ?

അതായത്, ഈ കണക്കിൽ രണ്ടായിപ്പറഞ്ഞുവെങ്കിലും, വിലകൾ തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധം മാത്രമേ യഥാർത്ഥത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ളൂ. അതു മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് വിലകൾ വെവ്വേറെ കണ്ടുപിടിക്കാനും കഴിയില്ല.

കമ്പ്യൂട്ടർ ബീജഗണിതം

സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള സങ്കീർണ്ണമായ കണക്കുകൂട്ടലുകൾ മാത്രമല്ല, ബീജഗണിത പ്രശ്ന ങ്ങൾ പരിഹരിക്കാനും കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിക്കാം. ഇതിനായി തയ്യാറാക്കപ്പെട്ട സോഫ്റ്റ്‌വെയറുകൾ പൊതുവെ Computer Algebra System (CAS) അല്ലെങ്കിൽ Symbolic Algebra System എന്ന പേരിലാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്.

SageMath, Maxima എന്നിവയാണ് ഇത്തരം പ്രമുഖമായ സ്വതന്ത്ര സോഫ്റ്റ്‌വെയറുകൾ.

GeoGebra യ്ക്കും ബീജഗണിതക്രിയകൾ ചെയ്യാൻ കഴിയും.

ആൻഡ്രോയ്ഡ് ഫോണുകളിലും GeoGebra യും Maxima യും ഉപയോഗിക്കാം.

ഒരു ജോടി സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ CAS ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന് $5x + 2y = 20$, $2x + 3y = 19$ എന്നീ സമവാക്യജോടികളുടെ പരിഹാരം കാണാൻ

CAS തുറന്ന് (view → CAS)

Solve ({5x + 2y = 20, 2x + 3y = 19}, {x, y}) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി.

$3x + 4y$ എന്ന സംഖ്യ 66 ആണെന്നാണ് 1-ാം സമവാക്യം പറയുന്നത്; അപ്പോൾ അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് 132.

$$6x + 8y = 132 \qquad (3)$$

ഇനി 2-ാം സമവാക്യവും, 3-ാം സമവാക്യവും ഉപയോഗിച്ച്, ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 132 - 72$$

ഇത് ലഘൂകരിച്ച്

$5y = 60$ എന്നും

അതിൽ നിന്ന് $y = 12$ എന്നും കിട്ടും.

തുടർന്ന് 1-ാം സമവാക്യത്തിൽ y ആയി 12 എടുത്താൽ x ഉം കണക്കാക്കാം.

$$3x + (4 \times 12) = 66$$

$$3x = 66 - 48 = 18$$

$$x = 6$$

(1) നാല് പേനയ്ക്കും, മൂന്ന് പെൻസിലിനും കൂടി 66 രൂപയാണ് വില. ഏഴ് പേനയ്ക്കും, മൂന്ന് പെൻസിലിനും കൂടി 111 രൂപ. ഒരു പേനയുടെ വില എത്രയാണ് ? പെൻസിലിന്റെ വിലയോ ?

(2) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 26 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഈ ചതുരത്തിന്റെ നീളം രണ്ട് മടങ്ങും വീതി മൂന്ന് മടങ്ങുമാക്കി മറ്റൊരു ചതുരം വരച്ചപ്പോൾ ചുറ്റളവ് 62 സെന്റിമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും എത്രയാണ് ?

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

ചെറിയ പാത്രത്തിൽ അഞ്ചു തവണയും, വലിയ പാത്രത്തിൽ രണ്ടു തവണയും വെള്ളം നിറച്ച് ഒരു തൊട്ടിയിൽ ഒഴിച്ചപ്പോൾ 20 ലിറ്റർ; ചെറിയ പാത്രത്തിൽ രണ്ടു തവണയും, വലിയ പാത്രത്തിൽ മൂന്നു തവണയും നിറച്ചൊഴിച്ചപ്പോഴോ, 19 ലിറ്ററും. ഓരോ പാത്രത്തിലും എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും ?

ചെറിയ പാത്രത്തിൽ x ലിറ്ററും, വലിയ പാത്രത്തിൽ y ലിറ്ററും കൊള്ളും എന്നെടുത്ത് കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങൾ ആക്കാം:

$$5x + 2y = 20 \qquad (1)$$

$$2x + 3y = 19 \qquad (2)$$

ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ ചെയ്തതുപോലെ, ഇതിലെ (1) ലും $2x$ തന്നെയാക്കണമെങ്കിൽ, $\frac{2}{5}$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം; മറിച്ച്, (2) ൽ $5x$ ആക്കണമെങ്കിൽ, $\frac{5}{2}$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം. ഇങ്ങനെ ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ, ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാതെ ഇതു ചെയ്യാനെന്തെങ്കിലും മാർഗമുണ്ടോ? സമവാക്യങ്ങളെ എന്തുകൊണ്ടും ഗുണിക്കാമല്ലോ. 1-ാം സമവാക്യത്തെ ഒരു സംഖ്യകൊണ്ടും 2-ാം സമവാക്യത്തെ മറ്റൊരു സംഖ്യകൊണ്ടും ഗുണിച്ച്, ഇവയിലെ x ന്റെ ഗുണിതം ഒരേ സംഖ്യയാക്കാമോ ?

$$(1) \times 2: \quad 10x + 4y = 40 \qquad (3)$$

$$(2) \times 5: \quad 10x + 15y = 95 \qquad (4)$$

ഇനി (4) ൽ നിന്ന് (3) കുറച്ച്

$$11y = 55$$

എന്നും, അതിൽനിന്ന്

$y = 5$ എന്നും കാണാം.

തുടർന്ന്, ഇത് (1) ൽ ഉപയോഗിച്ച് x ഉം കിട്ടും:

$$5x + 10 = 20$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

അങ്ങനെ ചെറിയ പാത്രത്തിൽ 2 ലിറ്ററും, വലിയ പാത്രത്തിൽ 5 ലിറ്ററും കൊള്ളുമെന്നു കണക്കാക്കാം.

സംഖ്യകൾ മാത്രം

പെൻസിൽ-പേന കണക്ക് x, y ഉപയോഗിക്കാതെ സംഖ്യകൾ മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് ആലോചിച്ചില്ലേ ? മറ്റു കണക്കുകളും ഇതുപോലെ ചെയ്യാം.

ഉദാഹരണമായി, പാത്രക്കണക്ക് ഇങ്ങനെ എഴുതി തുടങ്ങാം.

ചെറിയ പാത്രം	വലിയ പാത്രം	വെള്ളം
5	2	20
2	3	19

തുടർന്നുള്ള ക്രിയകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

	5	2	20
	2	3	19
×2	10	4	40
×5	10	15	95

ഇനി അവസാനത്തെ രണ്ടുവരിമാത്രം എടുത്ത് ഇങ്ങനെ തുടരാം:

	10	4	40
	10	15	95
−	0	11	55
÷ 11	0	1	5

അപ്പോൾ വലിയ പാത്രത്തിൽ 5 ലിറ്റർ. ഇനി ചെറിയ പാത്രത്തിൽ 2 ലിറ്റർ എന്ന് മനസ്സിൽ ത്തന്നെ കണക്കു കൂട്ടാമല്ലോ. ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങുന്നതിനുമുമ്പ് പ്രാചീന ചൈനയിലെ ഗണിതകാരന്മാർ ഇത്തരം കണക്കുകൾ ചെയ്തിരുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്.

(1) രണ്ടു കിലോഗ്രാം മധുരനാരങ്ങയ്ക്കും മൂന്നു കിലോഗ്രാം ആപ്പിളിനും കൂടി 520 രൂപ; മൂന്നു കിലോഗ്രാം മധുരനാരങ്ങയ്ക്കും രണ്ടു കിലോഗ്രാം ആപ്പിളിനും കൂടി 480 രൂപ. ഒരു കിലോഗ്രാം മധുരനാരങ്ങയുടെ വില എത്രയാണ് ? ആപ്പിളിന്റെയോ ?

(2) 1 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പി രണ്ടായി മുറിച്ച് ഒരു കഷണം വളച്ച് ഒരു സമചതുരവും മറ്റേ കഷണം വളച്ച് ഒരു സമഭുജത്രികോണവും ഉണ്ടാക്കുന്നു. സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങും സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങും കൂട്ടിയപ്പോൾ 71 സെന്റിമീറ്റർ ആണ് കിട്ടിയത്. എത്ര നീളത്തിലാണ് കമ്പി മുറിച്ചത് ?

(3) നാലു വർഷം മുൻപ് റഹിമിന്റെ പ്രായം, രാമുവിന്റെ പ്രായത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങായിരുന്നു. രണ്ടു വർഷം കഴിയുമ്പോൾ ഇത് രണ്ടു മടങ്ങാകും. അവരുടെ ഇപ്പോഴത്തെ പ്രായം എത്രയാണ് ?

മറ്റൊരു കണക്ക് നോക്കാം:

ഒരു സംഖ്യയുടെ നാല് മടങ്ങും മറ്റൊരു സംഖ്യയുടെ മൂന്ന് മടങ്ങും കൂട്ടിയപ്പോൾ 43 കിട്ടി. ആദ്യത്തെ സംഖ്യയുടെ മൂന്ന് മടങ്ങിൽ നിന്ന് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയുടെ രണ്ട് മടങ്ങ് കുറച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയത് 11. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

ഒന്നാമത്തെ സംഖ്യ x എന്നും രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ y എന്നും എടുത്ത് തുടങ്ങാം.

കണക്കിൽ പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങളെ സമവാക്യങ്ങളാക്കിയാൽ

$$4x + 3y = 43 \qquad (1)$$
$$3x - 2y = 11 \qquad (2)$$

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ സമവാക്യം (1) നെ 3 കൊണ്ടും (2) നെ 4 കൊണ്ടും ഗുണിച്ച് എഴുതിയാൽ,

$$(1) \times 3 : \; 12x + 9y = 129 \qquad (3)$$
$$(2) \times 4 : \; 12x - 8y = 44 \qquad (4)$$

ഇനി (3) ൽ നിന്ന് (4) കുറച്ച്,

$$\begin{aligned} 12x + 9y - (12x - 8y) &= 129 - 44 \\ 12x + 9y - 12x + 8y &= 85 \\ 17y &= 85 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

എന്നും കിട്ടും.

തുടർന്ന് $y = 5$ എന്നത് (1) ൽ ഉപയോഗിച്ച് x ഉം കണക്കാക്കാം.

$$\begin{aligned} 4x + 15 &= 43 \\ 4x &= 28 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

അങ്ങനെ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 7 എന്നും രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 5 എന്നും കിട്ടുന്നു.

ഒരു കണക്ക് കൂടി നോക്കാം

രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ തുക 28 ഉം, വ്യത്യാസം 12 ഉം ആണ്. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

ഇത്തരത്തിലുള്ള മറ്റൊരു കണക്ക് മുൻപ് ചെയ്തതോർമ്മയില്ലേ ? വലിയ സംഖ്യ x എന്നും ചെറിയ സംഖ്യ y എന്നും എടുത്ത് കണക്കിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതി നോക്കാം.

സംഖ്യകളുടെ തുക $x + y = 28$

വ്യത്യാസം $x - y = 12$

ഈ രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളുടെ തുക

$$(x + y) + (x - y) = 28 + 12$$

അതായത്, $2x = 40$

$$x = 20$$

ഇനി, ഇവയുടെ വ്യത്യാസം

$$(x + y) - (x - y) = 28 - 12$$

$$x + y - x + y = 16$$

അതായത്, $2y = 16$

$$y = 8$$

അപ്പോൾ വലിയ സംഖ്യ 20 ഉം, ചെറിയ സംഖ്യ 8 ഉം.

ഈ കണക്കിൽനിന്ന് മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി മനസ്സിലാക്കാം.

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും കൂട്ടിയാൽ വലിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങു കിട്ടും.

$$(x + y) + (x - y) = 2x$$

തുകയിൽ നിന്ന് വ്യത്യാസം കുറച്ചാൽ ചെറിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങു കിട്ടും.

$$(x + y) - (x - y) = 2y$$

കണക്കും കാര്യവും

10 മീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം. നീളം, വീതിയേക്കാൾ 5.5 മീറ്റർ കൂടുതലാകണം. നീളവും വീതിയും എത്രയാകണം ?

വീതി x എന്നെടുത്താൽ, നീളം $x + 5.5$ ആകണം. ചുറ്റളവ് 10 മീറ്ററാകണം എന്നതിനാൽ

$$x + (x + 5.5) = \frac{10}{2} = 5$$

അതായത്,

$$2x + 5.5 = 5$$

അഥവാ

$$2x = -0.5$$

ഇത് ശരിയാകില്ലല്ലോ. ചതുരത്തിന്റെ അളവുകളെങ്ങനെ ന്യൂനസംഖ്യകളാകും ?

ഇതിന്റെ അർഥം, ഈ നിബന്ധനകൾ രണ്ടും ശരിയാകുന്ന തരത്തിൽ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നതാണ്. ഈ കണക്കിൽ വീതി x, നീളം y എന്നെടുത്തിരുന്നെങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന് കിട്ടുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ

$$x + y = 5$$

$$y - x = 5.5$$

ഇത് രണ്ടും ശരിയാകുന്ന അധിസംഖ്യകൾ ഇല്ലെന്ന് പെട്ടെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം (രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ തുക, അവയുടെ വ്യത്യാസത്തെക്കാൾ ചെറുതാകില്ലല്ലോ).

(1) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ ചെറിയ കോണുകളുടെ വ്യത്യാസം $20°$. അതിന്റെ കോണുകൾ മൂന്നും കണക്കാക്കുക.

(2) രണ്ട് സംഖ്യകളിൽ വലുതിനെ ചെറുത് കൊണ്ട് ഹരിച്ചപ്പോൾ ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും 2 കിട്ടി. ചെറുതിന്റെ 5 മടങ്ങിനെ വലിയ സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിച്ചപ്പോഴും ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും 2 തന്നെ. സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക 11 ആണ്. ഈ സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങൾ പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യയേക്കാൾ 27 കൂടുതലാണ്. ഏതാണ് സംഖ്യ ?

(4) പതിനേഴ് ട്രോഫികൾക്കും, പതിനാറ് മെഡലുകൾക്കും കൂടി 2180 രൂപയാണ് വില. പതിനാറ് ട്രോഫികൾക്കും, പതിനേഴ് മെഡലുകൾക്കും കൂടി 2110 രൂപയാണ് വില. ഒരു ട്രോഫിയുടെ വില എന്താണ് ? ഒരു മെഡലിന്റെ വില എന്താണ് ?

(5) u മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി, ഓരോ സെക്കന്റിലും a മീറ്റർ/ സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കൂടി, നേർവരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു, ഇങ്ങനെ t സെക്കന്റിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം $ut + \frac{1}{2}at^2$ ആണ്. ഒരു വസ്തു 2 സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്ററും, 4 സെക്കന്റിൽ 28 മീറ്ററും സഞ്ചരിക്കുന്നു. യാത്രയുടെ തുടക്കത്തിൽ വേഗം എന്തായിരുന്നു ? ഓരോ സെക്കന്റിലും വേഗം കൂടുന്നതിന്റെ നിരക്കെന്താണ് ?

(6) ഒരു രണ്ടക്ക സംഖ്യ, അതിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുകയുടെ ആറ് മടങ്ങാണ്. അക്കങ്ങൾ പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന രണ്ടക്ക സംഖ്യ അക്കങ്ങളുടെ തുകയുടെ 4 മടങ്ങിനേക്കാൾ 9 കൂടുതലാണ്. രണ്ടക്കസംഖ്യയേതാണ് ?

(7) രണ്ട് സംഖ്യകളിൽ, ആദ്യ സംഖ്യയോട് 11 കൂട്ടിയപ്പോൾ രണ്ടാമത്തേതിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങും, രണ്ടാമത്തേതിനോട് 20 കൂട്ടിയപ്പോൾ ഒന്നാമത്തേതിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങും കിട്ടി. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?