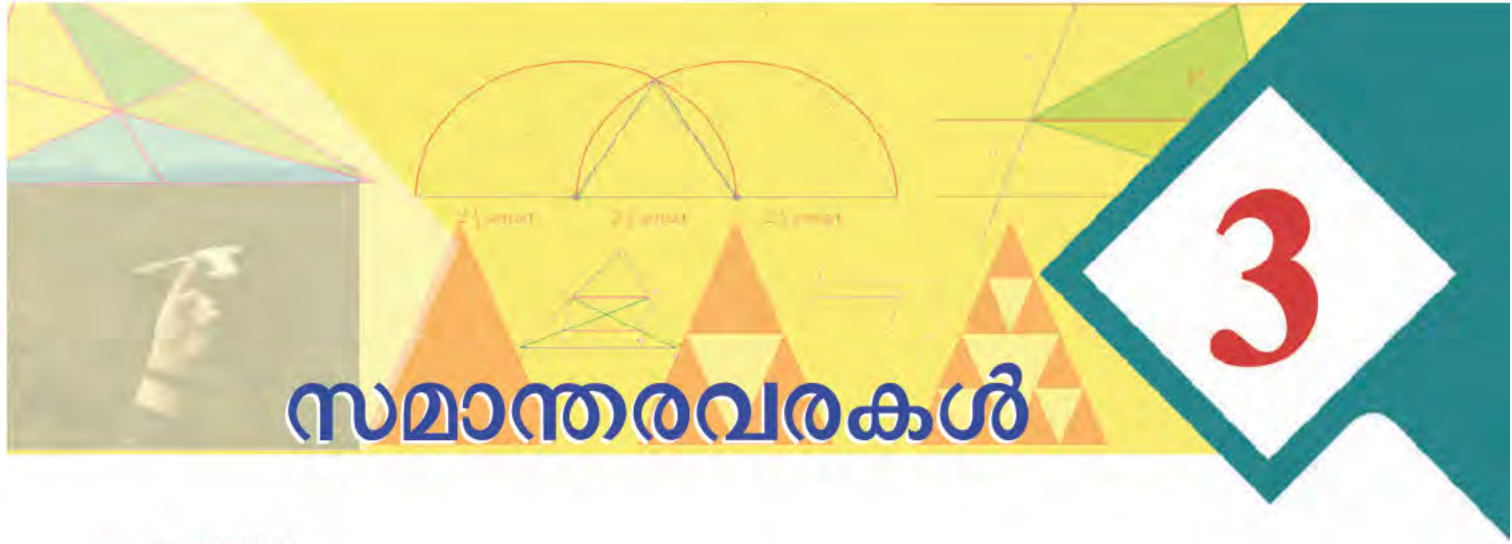


3

സമാന്തരവരകൾ

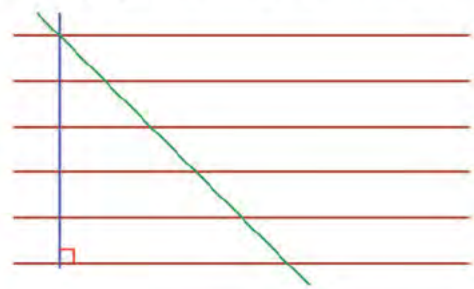
സമഭാഗം

സമാന്തരവരകളെക്കുറിച്ച് പലതും പഠിച്ചു; അവയുപയോഗിച്ച് പലതും വരച്ചു. സമാന്തരവിശേഷങ്ങൾ ഇനിയുമുണ്ട് പലതും.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

കുറേ സമാന്തരവരകളും, അവയ്ക്കെല്ലാം ലംബമായ ഒരു വരയും.

സമാന്തരവരകൾ ഒരേ അകലം ഇടവിട്ടാണ് വരച്ചിരിക്കുന്നത്; മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, സമാന്തരവരകൾ ലംബത്തെ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത്.

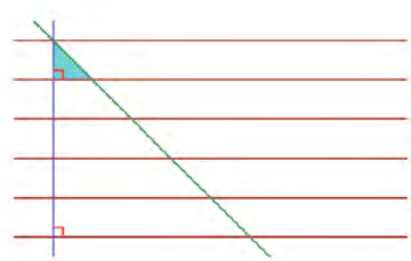


ലംബത്തിനു പകരം അല്പം ചരിച്ചൊരു വര വരച്ചാലോ ?

ഈ വരയെയും സമാന്തരവരകൾ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത് എന്നു തോന്നുന്നില്ലേ ? അതെങ്ങനെ പരിശോധിക്കും ?

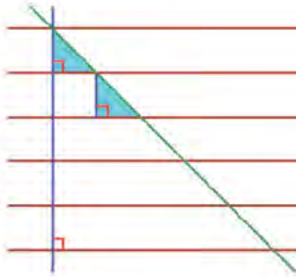
അളന്നു നോക്കാം;

അളക്കാതെതന്നെ ചിന്തിച്ചു പറയാൻ കഴിയുന്നതാണല്ലോ കണക്കിന്റെ രസം. ചിത്രത്തിന്റെ ഏറ്റവും മുകളിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണം കാണുന്നുണ്ടോ ?



ഇതിന്റെ കുത്തനെയുള്ള വശം ലംബവരയുടെ ഒരു ഭാഗമാണ്; കർണ്ണം ചരിഞ്ഞ വരയുടെ ഒരു ഭാഗവും.

ഒരു ചെറിയ ലംബം കൂടി വരച്ചാൽ, ഇതുപോലൊരു ത്രികോണം തൊട്ടുതാഴെയും കിട്ടും.

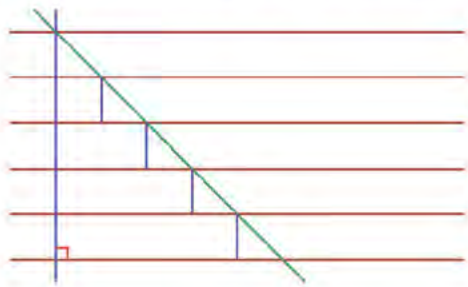


ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കുത്തനെയുള്ള (നീല) വശങ്ങൾക്ക് ഒരേനീളമാണ് (എന്തു കൊണ്ട് ?) മാത്രമല്ല ഈ ലംബങ്ങൾ സമാന്തരമായതുകൊണ്ട്, പച്ച വര ഇവയുമായി ഒരേ ചരിവിലുമാണ്.

അതായത്, ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും കുത്തനെയുള്ള വശങ്ങളും, അവയുടെ ഇരു വശങ്ങളിലുമുള്ള കോണുകളും തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ അവയുടെ കർണ്ണങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണല്ലോ.

അപ്പോൾ, ചരിഞ്ഞ വരയുടെ മുകളിലെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ്.

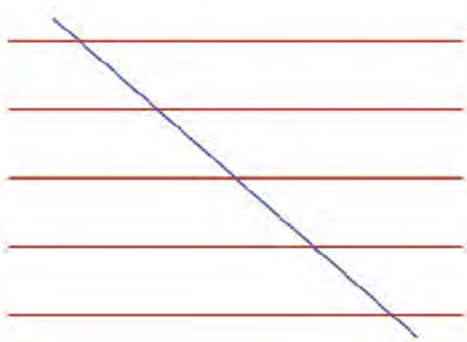
ഇതുപോലെ മറ്റു ഭാഗങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണെന്നു കാണാമല്ലോ:



ഇത് ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാം:

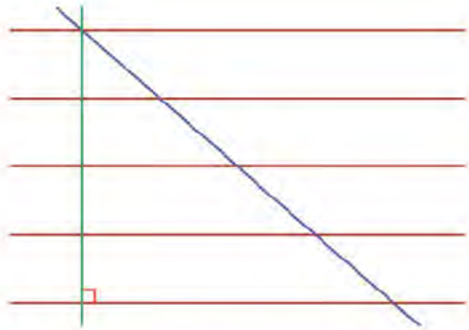
ഒരേ അകലം ഇടവിട്ടുള്ള സമാന്തരവരകൾ മറ്റ് ഏതു വരയേയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായാണ്.

മറിച്ചായാലോ ? അതായത് കുറേ സമാന്തരവരകൾ ഒരു വരയെ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായി മുറിക്കുന്നുവെന്നു കരുതുക. അവ തമ്മിൽ ഒരേ അകലത്തിലാണെന്നു പറയാമോ ?

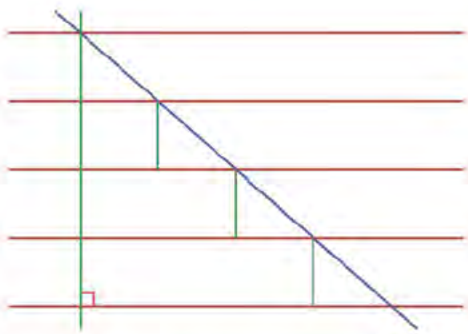


ചിത്രത്തിലെ സമാന്തരവരകൾ ചരിഞ്ഞ നീല വരയെ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത്. സമാന്തരവരകൾ ഒരേ അകലത്തിലാണോ എന്നതാണ് ചോദ്യം.

അതായത്, ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ പച്ച നിറമുള്ള ലംബത്തേയും സമാന്തരവരകൾ ഒരേ ഭാഗങ്ങളായാണോ മുറിക്കുന്നത് എന്നു നോക്കണം.



ആദ്യം ചെയ്തതുപോലെ ചെറുലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

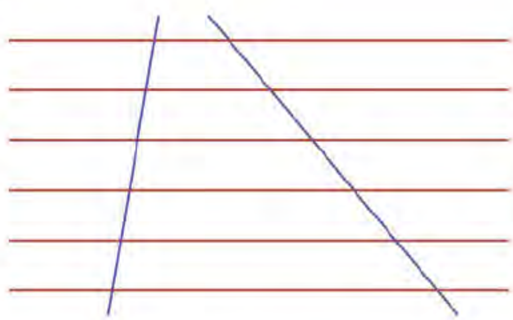


നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ചെറിയ ത്രികോണങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ കോണുകളാണ്. ഇവിടെ അവയുടെ കർണ്ണങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ്. അതിനാൽ അവയുടെ ലംബവശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ്.

അതായത്, ആദ്യത്തെ സമാന്തരവരകൾ ഒരേ അകലത്തിലാണ്.

ഇതും ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാം:

ഏതെങ്കിലും വരയെ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായി മുറിക്കുന്ന സമാന്തരവരകൾ ഒരേ അകലത്തിലാണ്.



ഈ രണ്ടു തത്വങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച് മറ്റൊരു കാര്യം കാണാം. ഒരു കൂട്ടം സമാന്തരവരകൾ ഏതെങ്കിലും വരയെ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത് എന്നു കരുതുക. ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വം അനു

സരിച്ച്, അവ ഒരേ അകലത്തിലാണ്. അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ട തത്വം അനുസരിച്ച് അവ മറ്റ് ഏതു വരയേയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായിട്ടാണ്.

അതായത്,

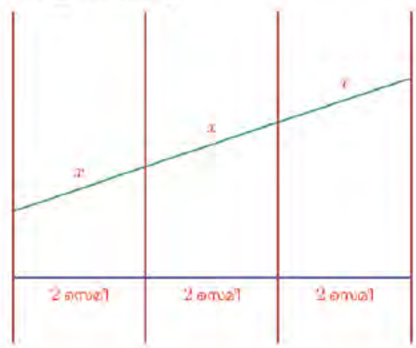
ഒരു വരയെ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായി മുറിക്കുന്ന സമാന്തരവരകൾ, ഏതു വരയേയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായിട്ടാണ്.

ഇതുപയോഗിച്ച്, ഏതു വരയേയും വേണ്ടത്ര സമഭാഗങ്ങളാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, 7 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയിൽ ഇതെളുപ്പമാണ്.

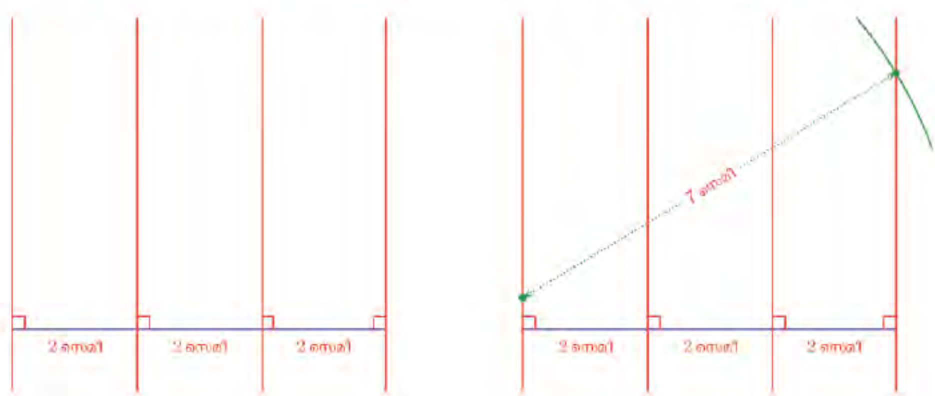
6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന നാലു സമാന്തരവരകൾ, ഏതു വരയെയും മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ:



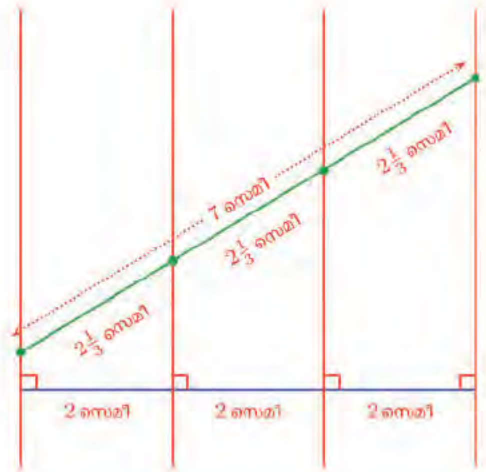
രണ്ടാമത്തെ വരയുടെ നീളം 7 സെന്റിമീറ്ററാക്കിയാലോ ?

അപ്പോൾ നമ്മുടെ പ്രശ്നം തീർക്കാനുള്ള വഴി തെളിഞ്ഞില്ലേ ?

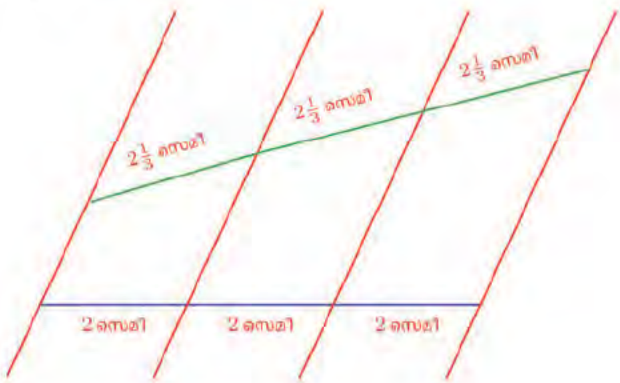
6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരച്ച്, അതിൽ 2 സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക; ആദ്യത്തെ ലംബത്തിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് 7 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തഭാഗം വരച്ച്, ഇത് അവസാനത്തെ ലംബത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.



ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ, 7 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും, അതിന്റെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളുമായി.



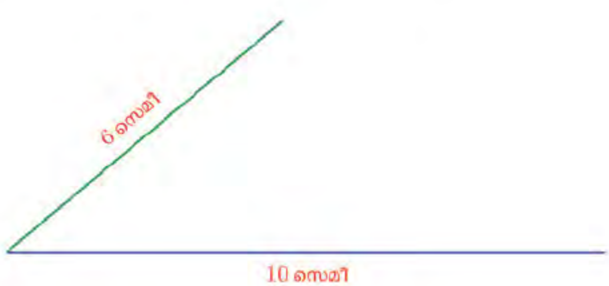
ഇതിൽ താഴത്തെ വരയിൽ നിന്ന് ലംബങ്ങൾ തന്നെ വരയ്ക്കണമെന്നില്ല. ചരിച്ചും വരയ്ക്കാം - സമാന്തരമായിരിക്കണമെന്നുമാത്രം.



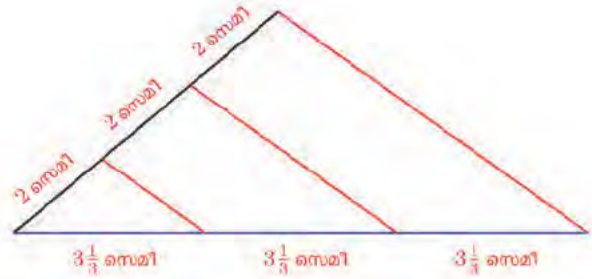
മറ്റൊരു ചോദ്യം :

10 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരച്ച്, അതിനെ മൂന്ന് സമഭാഗങ്ങളാക്കുക.

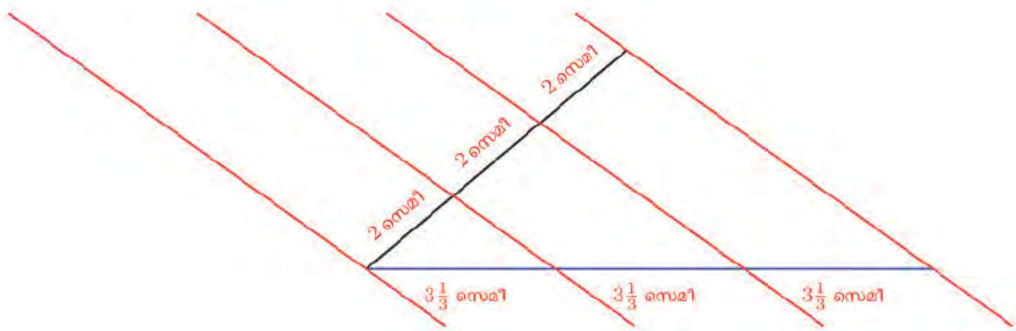
മുറിക്കേണ്ട വര ചരിച്ചുവരയ്ക്കാതെ വിലങ്ങനെതന്നെ വരച്ചു തുടങ്ങുന്നതാണ് സൗകര്യം. ഇനി മുറിക്കാൻ സഹായിക്കുന്ന വര ഒരറ്റത്തുനിന്ന് ചരിച്ചു വരയ്ക്കാം.



വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചൊരു വര വരയ്ക്കുക. ഇനി താഴത്തെ വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കാൻ, മുകളിലെ വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കി, ആ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ സമാന്തരവരകൾ വരച്ചാൽ പ്പോരേ ?

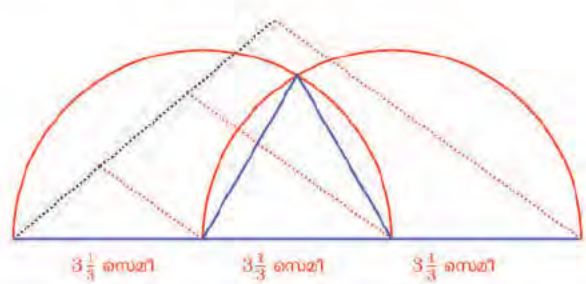


ഇത് മനസ്സിലായില്ലെങ്കിൽ, അല്പം നീട്ടിയ സമാന്തരവരകളും നാലാമതൊരു സമാന്തരവരയും സങ്കല്പിച്ചുനോക്കൂ:



അങ്ങനെ 10 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കി.

ഈ ഭാഗങ്ങൾ ചേർത്തു വച്ചൊരു ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കിയാലോ ?



വശങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ നീളമായതിനാൽ ഇതൊരു സമഭുജത്രികോണമാണ്. അവയെല്ലാം കൂട്ടിയാൽ 10 സെന്റിമീറ്റർ; അതായത്, ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 10 സെന്റിമീറ്റർ.

10 സെന്റിമീറ്റർ വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നതിനു പകരം, നാലു സമഭാഗങ്ങളാക്കണമെങ്കിൽ, ഇതുപോലെ മുകളിൽ എത്ര നീളത്തിലുള്ള വര ചരിച്ചു വരയ്ക്കുന്നതാണ് സൗകര്യം ?

അങ്ങനെ ഭാഗിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, 10 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള സമചതുരവും വരയ്ക്കാമല്ലോ.

ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ.

(1) 11 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(2) 15 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

(3) 20 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള സമഷഡ്ഭുജം വരയ്ക്കുക.

അസമഭാഗങ്ങൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ

വ്യത്യസ്ത അകലം ഇടവിട്ട് മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ.

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ഒരു ചരിഞ്ഞ വര വരച്ചാലോ?

പച്ച വരയുടെ ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററും 3 സെന്റിമീറ്ററും അല്ലെന്ന് ഒറ്റ നോട്ടത്തിൽത്തന്നെ പറയാമല്ലോ.

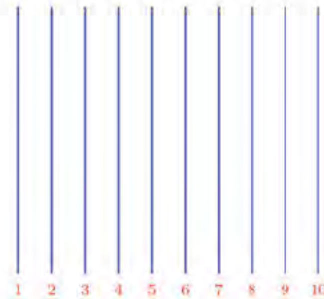
ഈ നീളങ്ങൾക്ക് 2 ഉം 3 ഉം ആയി എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

മൂന്നു വരകൾ കൂടി സമാന്തരമായി വരച്ച്, ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ആറു വരകളാക്കിയാലോ?

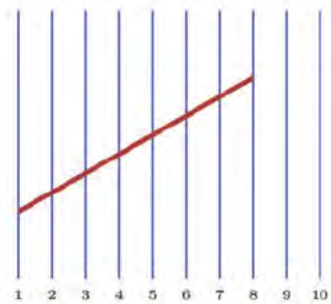
ഇപ്പോൾ ചരിഞ്ഞ വര അഞ്ചു സമഭാഗങ്ങളായി. ഇതിലെ താഴത്തെ രണ്ടു ഭാഗം ചേർന്നതാണ്, ആദ്യം കണ്ട രണ്ടു ഭാഗങ്ങളിലെ ചെറിയ ഭാഗം; മുകളിലെ മൂന്നെണ്ണം ചേർന്നത്, വലിയ ഭാഗവും.

സമാന്തര സമഭാഗം

ഒരു കടലാസിൽ കുറേ സമാന്തരവരകൾ ഒരേ അകലം ഇടവിട്ടു വരയ്ക്കുക.

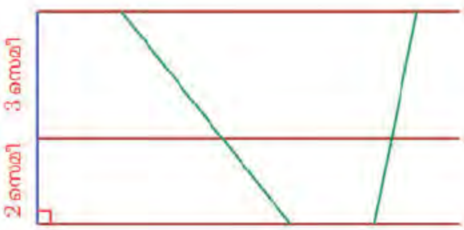


ഇനി ഒരു കമ്പി 7 സമഭാഗങ്ങളായി മുറിക്കണമെങ്കിൽ, ഇതിലെ എട്ടു വരകൾക്കിടയിലായി അതിനെ കൃത്യമായി വച്ചാൽ മതി.



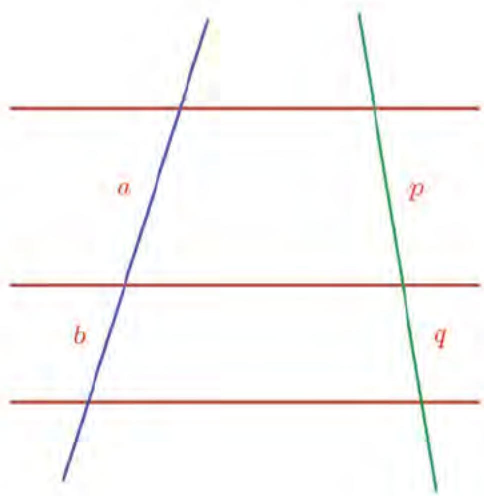
മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ചരിഞ്ഞ വരയുടെ ചെറിയ ഭാഗവും വലിയ ഭാഗവും $2 : 3$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

വര അല്പം മാറ്റി വരച്ചാലോ ?



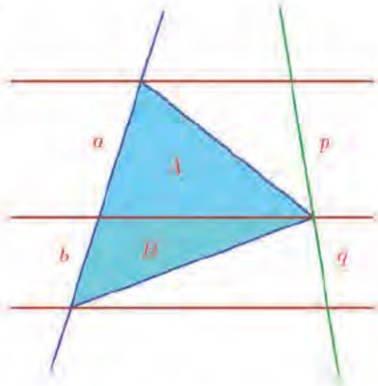
ഭാഗങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾക്ക് വ്യത്യാസം വരുമെങ്കിലും, സമഭാഗങ്ങൾ രണ്ടെണ്ണം ചേർന്നത് ചെറിയ ഭാഗവും, മൂന്നെണ്ണം ചേർന്നത് വലിയ ഭാഗവും ആയിരിക്കുമല്ലോ; അതായത് അംശബന്ധം $2 : 3$ തന്നെ ആയിരിക്കും.

ഇതുപോലെ, ഏതു മൂന്നു സമാന്തരവരകളും, മറ്റെല്ലാ വരകളെയും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണോ ഭാഗിക്കുന്നത് ?



വിലങ്ങനെ മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ; അവയെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന രണ്ടു ചരിഞ്ഞ വരകൾ. ഇടതു വരയെ സമാന്തരവരകൾ മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന കഷണങ്ങളുടെ നീളം a, b എന്നും, വലതു വരയെ സമാന്തരവരകൾ മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന കഷണങ്ങളുടെ നീളം p, q എന്നുമെടുത്താൽ $a : b$ എന്ന അംശബന്ധവും, $p : q$ എന്ന അംശബന്ധവും ഒന്നുതന്നെയാണോ എന്നാണ് അന്വേഷിക്കേണ്ടത്; അതായത്, $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ ആണോ എന്നതാണ് ചോദ്യം.

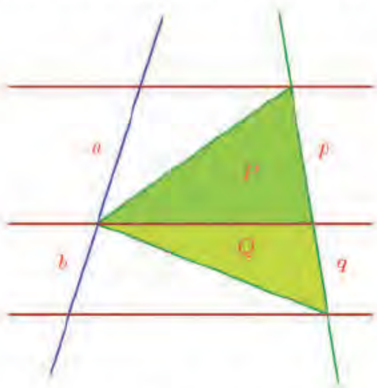
അത് പരിശോധിക്കാൻ, ആദ്യം നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തെ പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധമായി മാറ്റാം:



ഇപ്പോൾ താഴെയും മുകളിലുമുള്ള നീല ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധം $a : b$ തന്നെയാണെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ; അതായത്, ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ A, B എന്നെടുത്താൽ

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

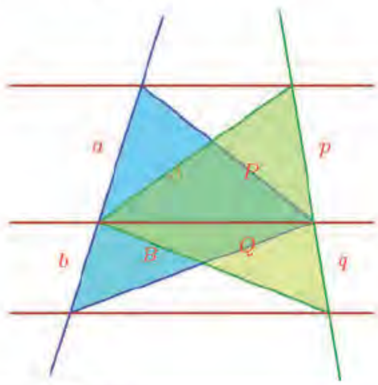
ഇതുപോലെ p, q എന്നീ നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തെയും, പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധമാക്കാം:



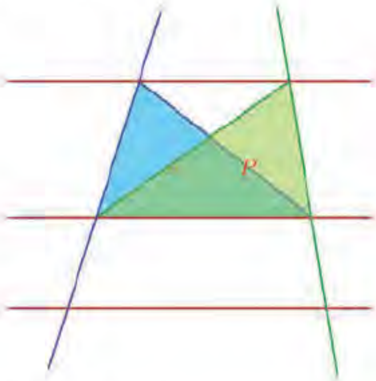
ചിത്രത്തിലേതുപോലെ, പച്ച ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ P, Q എന്നെടുത്താൽ,

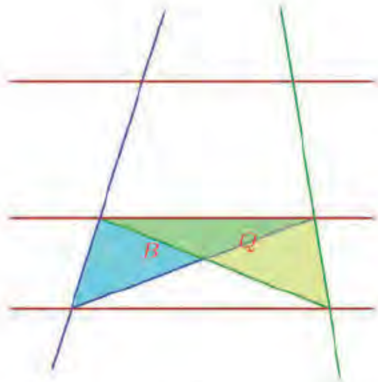
$$\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$$

ഇനി എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളും ഒരുമിച്ചുവച്ചു നോക്കാം:



താഴെയും മുകളിലും ഓരോ നീല ത്രികോണവും പച്ച ത്രികോണവും ഉണ്ട്. അവയെ വെവ്വേറെ ജോടികളായി നോക്കാം:





മുകളിലെ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും താഴത്തെ വശം ഒരേ വരയാണ്; അവയുടെ മൂന്നാം മൂലകൾ ഈ വശത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലുമാണ്. അതിനാൽ അവയ്ക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണ്.

$$A = P$$

ഇതുതന്നെയല്ലേ താഴത്തെ നീലയും പച്ചയും ത്രികോണങ്ങളുടെ കാര്യവും

$$B = Q$$

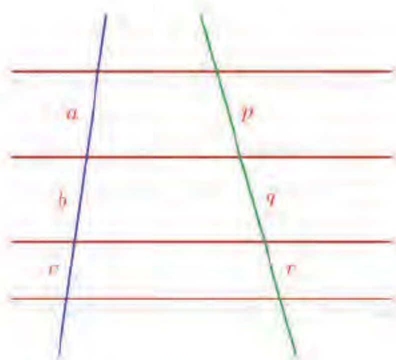
$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ എന്നും, $\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$ എന്നും നേരത്തെ കണ്ടതാണല്ലോ. ഇപ്പോൾ ഇതിലെ $A = P$ യും $B = Q$ യും ആണെന്നും കിട്ടി. അങ്ങനെ

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

അതായത്, ഈ മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ ഇടതും വലതും വരകളെ മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

വരകൾ മൂന്നിൽ കൂടുതലായാലോ ?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഇതിലെ ഏറ്റവും താഴത്തെ സമാന്തരവര ഒഴിവാക്കി, മറ്റു മൂന്നെണ്ണം മാത്രം നോക്കിയാൽ, ഇപ്പോൾ കണ്ടതുപോലെ $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ എന്നു കിട്ടും.

ഏറ്റവും മുകളിലെ വര ഒഴിവാക്കി, മറ്റു മൂന്നെണ്ണം മാത്രം നോക്കിയാൽ, $\frac{b}{c} = \frac{q}{r}$ എന്നും കിട്ടും.

$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ എന്നും, $\frac{b}{c} = \frac{q}{r}$ എന്നും കിട്ടിയതിൽ നിന്ന്, $\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{p}{q} \times \frac{q}{r}$ എന്നും കിട്ടുമല്ലോ. അതായത് $\frac{a}{c} = \frac{p}{r}$. അപ്പോൾ a, b, c എന്ന മൂന്നു നീളങ്ങളിൽ ഒന്നു മറ്റൊന്നിന്റെ ഏതു ഭാഗമോ മടങ്ങോ ആയാലും, അതേ ഭാഗമോ മടങ്ങോ തന്നെയാണ് p, q, r എന്നീ നീളങ്ങളിലും.

അപ്പോൾ a, b, c എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും p, q, r എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും ഒന്നുതന്നെയാണ്.

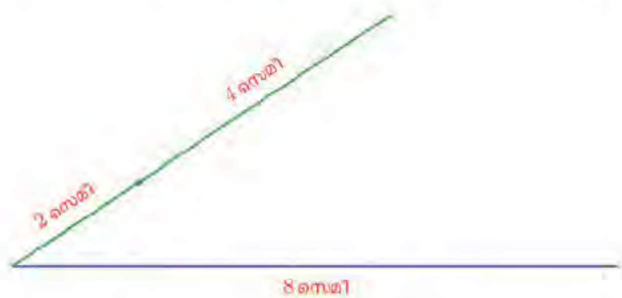
സമാന്തരവരകൾ എത്രയെണ്ണം ആയാലും, ഇതുപോലെതന്നെ തുടരാമല്ലോ.

മൂന്നോ അതിലധികമോ സമാന്തരവരകൾ, ഏതു രണ്ടു വരകളെയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

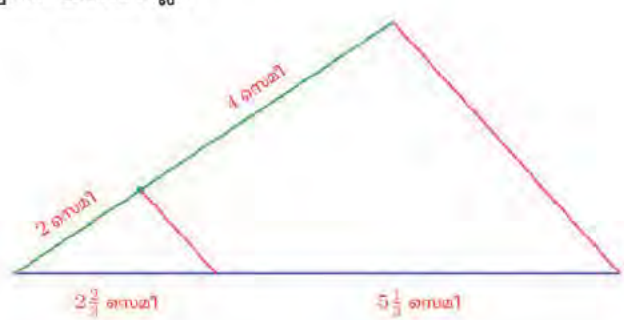
ഇതുപയോഗിച്ച് ഒരു വരയെ ഏത് അംശബന്ധത്തിലും ഭാഗിക്കാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ ഇങ്ങനെ ഭാഗിക്കാൻ എളുപ്പമല്ലേ ?

അപ്പോൾ, മുമ്പ് വരയെ സമഭാഗം ചെയ്തതുപോലെ, ആദ്യം ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം.



ഇനി വരകളുടെ മറ്റേ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച വരയും പച്ച വരയെ ഭാഗിക്കുന്ന കുത്തിലൂടെ സമാന്തരവരയും വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ:



മറ്റൊരു കണക്ക്:

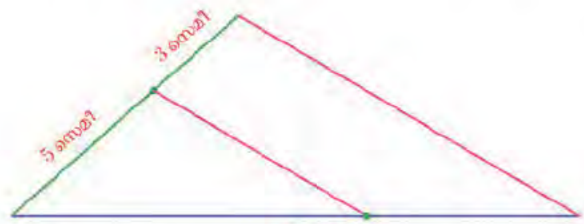
ചുറ്റളവ് 30 സെന്റിമീറ്ററും, വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 5 : 3 ഉം ആയ ചതുരം വരയ്ക്കണം:

ചുറ്റളവ് 30 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, നീളവും വീതിയും കൂട്ടിയാൽ 15 സെന്റിമീറ്റർ.

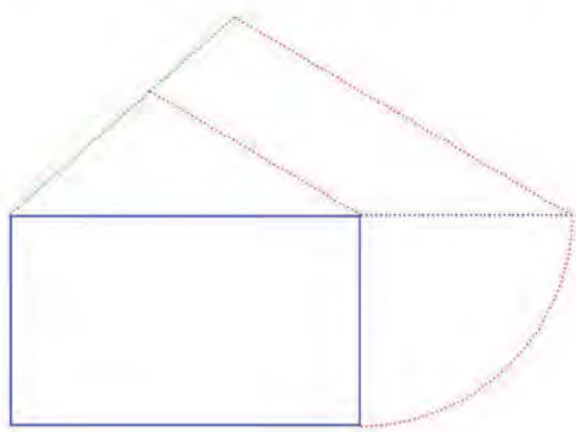
അപ്പോൾ 15 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 5 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന കഷണങ്ങളാണ് നീളവും വീതിയും.

ഈ ഭാഗങ്ങൾ കിട്ടാൻ, ഇങ്ങനെ തുടങ്ങാം:

വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച വരയും സമാന്തരവരയും വരയ്ക്കാം:



താഴത്തെ വരയുടെ ഭാഗങ്ങൾ നീളവും വീതിയുമായ ചതുരമാണ് നമുക്കാവശ്യം.



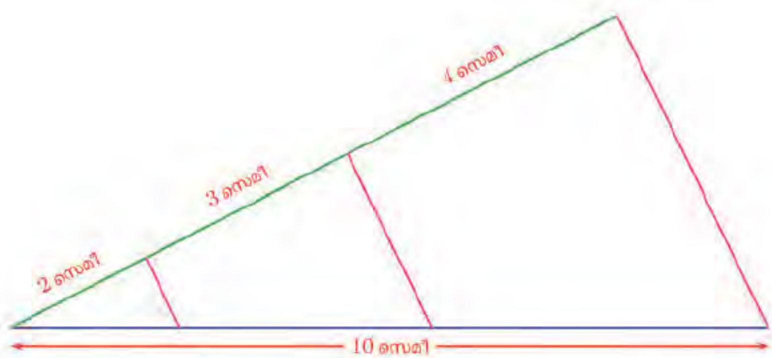
ഒരു കണക്കു കൂടി :

ചുറ്റളവ് 10 സെന്റിമീറ്ററും, വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 : 4 ഉം ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കണം.

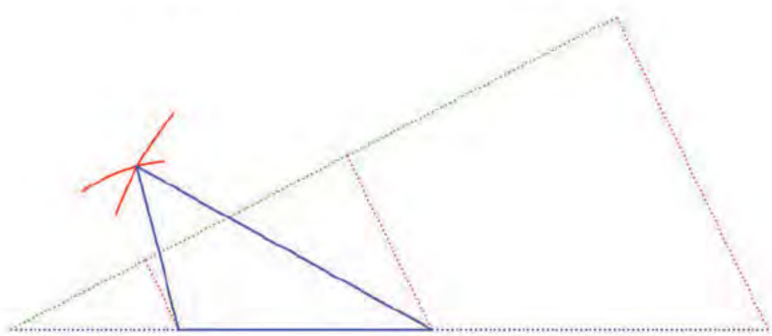
ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെയെല്ലാം നിവർത്തിവച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ഒറ്റ വരയുടെ നീളമാണ് 10 സെന്റിമീറ്റർ:

അപ്പോൾ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ ആദ്യം 10 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വര വരച്ച്, 2 : 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിച്ച്, ഇരു വശത്തെയും ഭാഗങ്ങൾ മടക്കി വച്ചാൽപ്പോരേ ?

ഈ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കാൻ എളുപ്പം എത്ര നീളമുള്ള വരയാണ് ?



ഇനി ത്രികോണം വരയ്ക്കാമല്ലോ.



(1) ചുറ്റളവ് 15 സെന്റിമീറ്ററും വീതിയും നീളവും 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുമായ ചതുരം വരയ്ക്കുക.

(2) ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ തരത്തിലുമുള്ള ത്രികോണം, ചുറ്റളവ് 13 സെന്റിമീറ്ററായി വരയ്ക്കുക.

(i) സമഭുജത്രികോണം

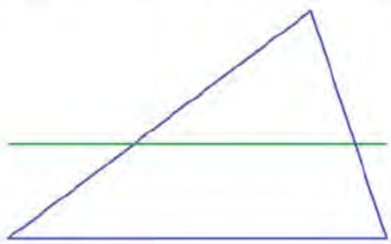
(ii) വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 4 : 5

(iii) പാർശ്വവശങ്ങൾ പാദത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങായ സമപാർശ്വത്രികോണം.

(3) ഏതു ലംബകത്തിന്റെയും വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

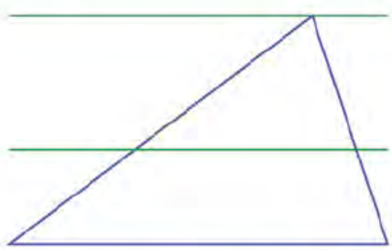
ത്രികോണഭാഗം

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച്, അതിനുള്ളിൽത്തന്നെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വര വരയ്ക്കുക.



ഈ വര ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെയും മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ ?

ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂലയിലൂടെ ഒരു വര കൂടി താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരച്ചാലോ ?

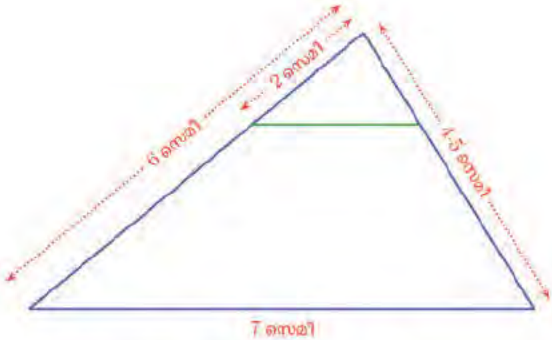


ഇപ്പോൾ മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ, ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നു; മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഒന്നുതന്നെ ആണല്ലോ.

ഇവിടെ എന്താണു കണ്ടത് ?

ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് മുറിക്കുന്നത്.

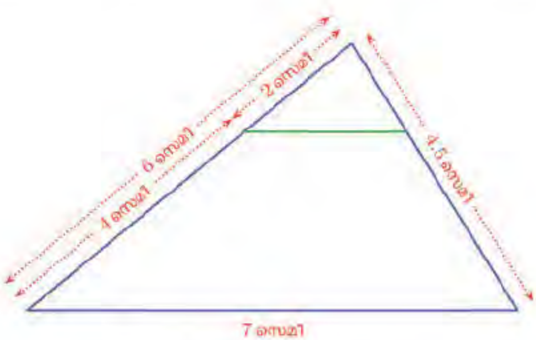
ഒരു കണക്കു നോക്കാം:



ചിത്രത്തിൽ നീല ത്രികോണത്തിനുള്ളിലെ പച്ച വര, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമാണ്.

ഈ വര ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കണം. ഇരു വശങ്ങളെയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണല്ലോ.

ഇടതുവശത്തെ മുറിക്കുന്നത്, ഏത് അംശബന്ധത്തിലാണ് ?



ഇടതുവശത്തിന്റെ വലിയ ഭാഗം, ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ്; അതായത്, ഈ ഭാഗങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 1 : 2

അപ്പോൾ വലതുവശത്തെ മുറിക്കുന്നതും 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആകണമല്ലോ.

$$\text{ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം} = 4.5 \times \frac{1}{3} = 1.5 \text{ സെമീ}$$

$$\text{വലിയ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം} = 4.5 \times \frac{2}{3} = 3 \text{ സെമീ}$$

Min = 0, Max = 1, Increment = 0.01 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ 'a' നിർമ്മിക്കുക. ഒരു ത്രികോണം ABC വരയ്ക്കുക. Enlarge from Point (Dilate from point) ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് C യിലും തുടർന്ന് A യിലും ക്ലിക്കുചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ Scale Factor ആയി a എന്ന് നൽകുക. AC എന്ന വരയിൽ C' എന്ന ഒരു ബിന്ദു ലഭിക്കും. AC' ന്റെ നീളം AC യുടെ നീളത്തിന്റെ 'a' ഭാഗമായിരിക്കും. (a = 0.5 ആയാൽ C', AC യുടെ മധ്യബിന്ദു ആവും, a = 0.1 ആയാൽ AC', C'C ഇവയുടെ നീളം 1:9 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാവും. AC', C'C ഇവയുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തി പരിശോധിച്ചുനോക്കൂ). C' എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ AB യ്ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു വര വരച്ച് ഈ വര BC യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. BD, DC എന്നീ നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. AC' : C'C, BD : DC എന്നീ അംശബന്ധങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുക.

ഇവിടെ ഒരു കാര്യം ശ്രദ്ധിച്ചോ ? ഏതു വശത്തെയും ചെറിയ ഭാഗം, വശത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്; വലിയ ഭാഗം, വശത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗവും.

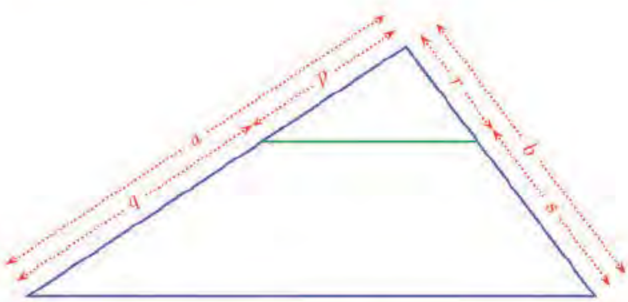
രണ്ടു വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നത് 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലായാലോ ?

രണ്ടു വശങ്ങളിലും ചെറിയ കഷണം, വശത്തിന്റെ $\frac{3}{8}$ ഭാഗം; വലിയ കഷണം, വശത്തിന്റെ $\frac{5}{8}$ ഭാഗം.

അപ്പോൾ മുമ്പു പറഞ്ഞ തത്വം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര മറ്റു രണ്ടുവശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നത്, അവയുടെ ഒരേ ഭാഗങ്ങളായിട്ടാണ്.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



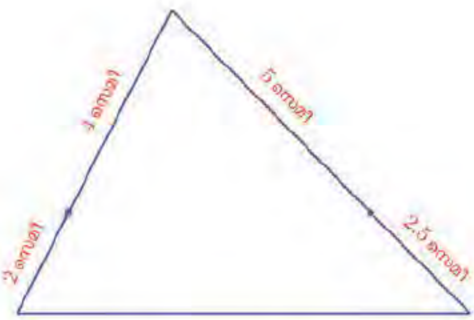
ത്രികോണത്തിനുള്ളിലെ പച്ച വര, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമാണ്. വശങ്ങളുടെയും അവയുടെ ഭാഗങ്ങളുടെയും നീളങ്ങളെ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ അക്ഷരങ്ങൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചാൽ, ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച്,

$$\frac{p}{a} = \frac{r}{b} \qquad \frac{q}{a} = \frac{s}{b}$$

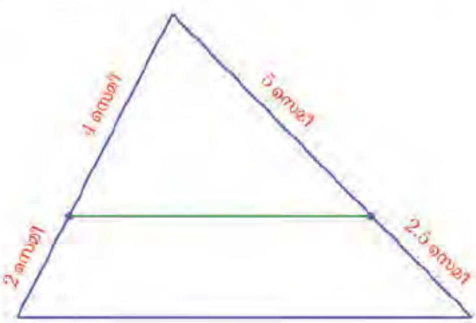
ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു എന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ഒരു ചോദ്യമുണ്ട്. ഇത് മറിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ശരിയാകുമോ ?

അതായത്, ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമാണെന്നു പറയാമോ ?

ഉദാഹരണമായി ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിൽ, ഇടതും വലതും വശങ്ങളെ $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന കുത്തുകൾ ഇട്ടിട്ടുണ്ട്.



ഇടതുവശത്തെ കുത്തിലൂടെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, വലതുവശത്തെയും $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കണമല്ലോ. അപ്പോൾ അത് വലതുവശത്തെ കുത്തിലൂടെയും കടന്നുപോകണം; അതായത്, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, ഈ കുത്തുകൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര തന്നെയാണ്. അപ്പോൾ ഈ കുത്തുകൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര താഴത്തെ വശത്തിന് സമാന്തരമാണ്.

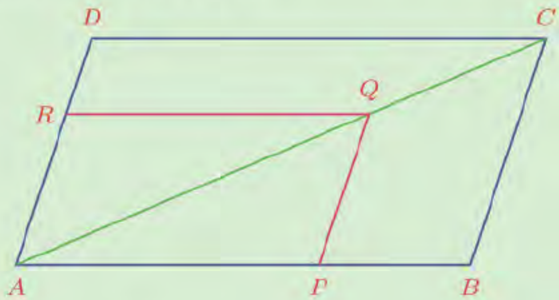


ഏതു ത്രികോണത്തിലും രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമാണ്.

(1) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ പച്ച വര, നീല ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു വശത്തിനു സമാന്തരമാണ്.

ഈ വര ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

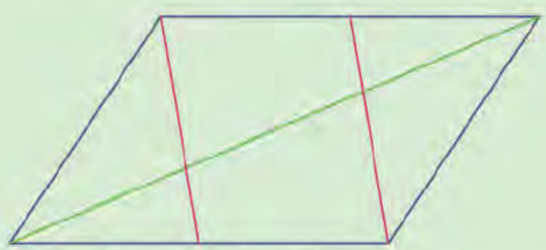
(2) $ABCD$ എന്ന സാമാന്തരികത്തിൽ AB യിലെ P എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി BC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, AC യുമായി Q ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. Q യിലൂടെ AB യ്ക്കു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, AD യുമായി R ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.



(i) $\frac{AP}{PB} = \frac{AR}{RD}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

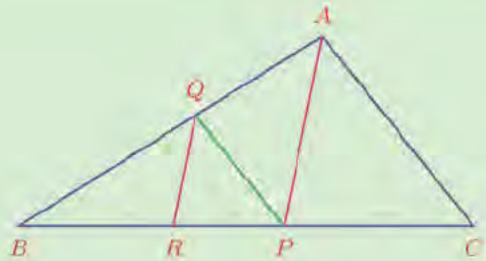
(ii) $\frac{AP}{AB} = \frac{AR}{AD}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ടു മൂലകളെ, രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഈ വരകൾ ചിത്രത്തിലെ വികർണ്ണത്തെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു എന്നു തെളിയിക്കുക.

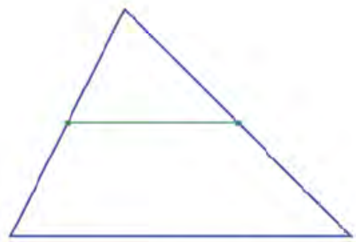
(4) ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ, BC യിലെ P എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ AC യ്ക്ക് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, AB യുമായി Q യിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. Q ൽ നിന്ന് AP യ്ക്ക് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, BC യുമായി R ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.



$\frac{BP}{PC} = \frac{BR}{RP}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

മധ്യഭാഗം

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



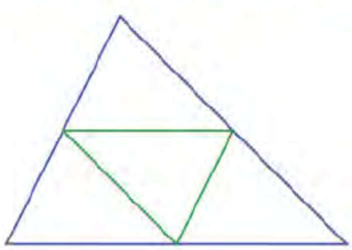
ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽക്കൂടി, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരച്ചതാണ് ഉള്ളിലെ പച്ച വര.

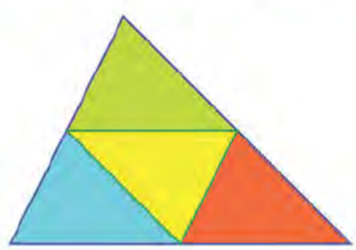
ഇത് ഇടതുവശത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ ആ വശത്തിന്റെ പകുതി ആയതിനാൽ, വലതുവശത്തെയും സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു; അതായത്, വലതുവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നു. തിരിച്ചായാലോ? ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, അവ രണ്ടിനേയും $1 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണല്ലോ ഭാഗിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ആ വര, താഴത്തെ വശത്തിന് സമാന്തരമാണ്.

ഇതും എടുത്തുപറയേണ്ട ഒരു കാര്യമാണ്.

ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി മറ്റൊരു വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വശത്തെ മുട്ടുന്നതും അതിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലാണ്. മറിച്ച്, ഏതു ത്രികോണത്തിലും രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു വരയ്ക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരവുമാണ്.

ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാലോ?





ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും ഉള്ളിലുള്ള ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ.

ഈ നാലു ചെറുത്രികോണങ്ങളെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ? നടുവിലെ മഞ്ഞത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു സമാന്തരമാണ്.

ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണെന്നു തോന്നുന്നില്ലേ? അതു ശരിയാണോ എന്നു നോക്കാം.

ആദ്യം നീലത്രികോണവും മഞ്ഞത്രികോണവും എടുക്കാം. നീലത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശവും മഞ്ഞത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശവും ഒരേ വരയാണ്.

നീലത്രികോണത്തിന്റെ ഈ വശത്തിന്റെ മുകളിലെ കോണും, മഞ്ഞത്രികോണത്തിൽ ഈ വശത്തിന്റെ താഴെയുള്ള കോണും തുല്യമാണ് (എന്തുകൊണ്ട് ?); നീലത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ കോണും മഞ്ഞത്രികോണത്തിലെ മുകളിലെ കോണും തുല്യമാണ്.

അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണ്. ഇതുപോലെ പച്ചത്രികോണവും, ചുവന്ന ത്രികോണവും എല്ലാം മഞ്ഞത്രികോണത്തിനു തുല്യമാണെന്നു കാണാം. അതായത്, ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണ്.

ഇതിൽനിന്ന് മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കിട്ടും. ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമായതിനാൽ, ഓരോ വശവും വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെ പകുതിയാണ്. അതായത് :

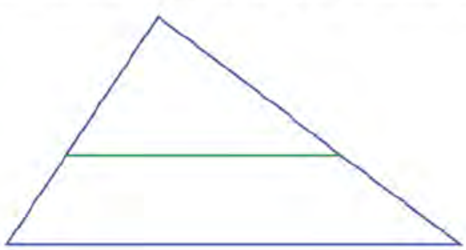
ഏതു ത്രികോണത്തിലും രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ നീളം, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുവരയ്ക്കുന്ന വര മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന് സമാന്തരമാണെന്നും കണ്ടല്ലോ.

അപ്പോൾ ഇക്കാര്യവും, ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞ തത്വവും ചേർത്ത് ഇങ്ങനെ പറയാം:

ഏതു ത്രികോണത്തിലും രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരവും അതിന്റെ പകുതിയുമാണ്.

ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിൽ കാണാം. ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ മറ്റൊരു ചെറിയ ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കുന്നുണ്ടല്ലോ.



ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളിൽത്തന്നെയാണ്. ഈ ചെറിയ വശങ്ങൾ, വലിയ വശങ്ങളുടെ ഒരേ ഭാഗമാണെന്നതും കണ്ടു.

ഈ ഭാഗങ്ങൾ പകുതിയാണെങ്കിൽ, മൂന്നാമത്തെ വശവും പകുതിതന്നെ ആണെന്നാണ് ഇപ്പോൾ കണ്ടത്.

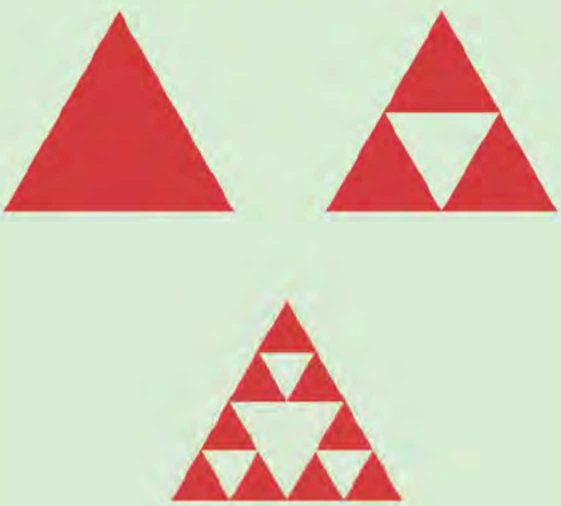
രണ്ടു വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നത് മൂന്നിലൊന്നായിട്ടാണെങ്കിലോ ? ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം വശവും, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം വശത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നുതന്നെ ആകുമോ ?

രണ്ടു വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നത് ഏതു ഭാഗമായിട്ടാണെങ്കിലും, മൂന്നാമത്തെ വശവും അതേ ഭാഗം തന്നെയാണെന്ന് പിന്നീട് കാണാം.

(1) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് ? പരപ്പളവോ ?

(2) ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത ഒരു ത്രികോണമാണ് ആദ്യചിത്രം. അതിൽ നിന്ന് വശങ്ങളുടെ

കാൽക്കണക്ക്

ചിത്രത്തിലെ ഓരോ ചെറിയ ത്രികോണവും വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗമാണല്ലോ:

ചുവടെയുള്ള മൂന്നു ത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം എടുത്താൽ, $\frac{3}{4}$ ഭാഗം, മുകളിലെ മഞ്ഞ ത്രികോണം, ബാക്കി $\frac{1}{4}$ ഭാഗം. ഈ ചിത്രത്തിലോ ?

നീലയും ചുവപ്പും പച്ചയും ചേർന്ന് $3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right)$ ഭാഗം, മഞ്ഞ $\frac{1}{16}$ ഭാഗം. അടുത്ത ചിത്രത്തിലോ ?

നീല, പച്ച, ചുവപ്പു ത്രികോണങ്ങൾ ക്രമേണ വലിയ ത്രികോണത്തെ നിറയ്ക്കുന്നുണ്ടല്ലോ.

ഇക്കാര്യം സംഖ്യകളായി പറഞ്ഞാൽ, $\frac{3}{4}$, $3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right)$, $3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}\right)$ ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സംഖ്യകൾ 1 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

അതായത്, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുകിട്ടുന്ന നടുവിലെ ചെറിയ ത്രികോണം വെട്ടിമാറ്റിയതാണ് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രം. ഇതിലെ മൂന്നു ത്രികോണങ്ങളിൽനിന്നും ഇതുപോലെ നടുവിലെ ത്രികോണം വെട്ടിമാറ്റിയതാണ് മൂന്നാമത്തെ ചിത്രം.

(i) രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെ കടലാസിന്റെ പരപ്പളവ്, ആദ്യ ചിത്രത്തിലെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ?

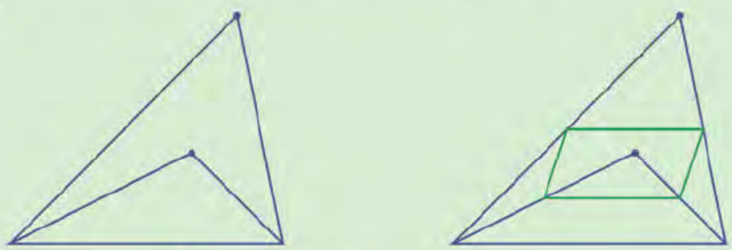
(ii) മൂന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിലോ ?

(3) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മട്ടമൂലയും, വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളും മൂലകളായി ഒരു ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

(i) ഈ ചതുർഭുജം ചതുരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ii) ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ?

(4) ചുവടെയുള്ള ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ഒരു വരയുടെ മുകളിലെ രണ്ടു കുത്തുകൾ വരയുടെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ച് രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ത്രികോണങ്ങളുടെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ചതുർഭുജവും:



AB എന്ന ഒരു വര വരച്ച് അതിനു മുകളിലായി രണ്ടു കുത്തുകൾ C, D ഇവ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ കുത്തുകളെ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളുമായി യോജിപ്പിച്ച് രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ ഇടതും വലതുമുള്ള വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി അവ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കുക. ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പ്രത്യേകത എന്താണ് ? C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. ഈ ചതുർഭുജം സമഭുജ സാമാന്തരികം, ചതുരം, സമചതുരം എന്നിവ ആകണമെങ്കിൽ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം എവിടെയായിരിക്കണം ? C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ AB യുടെ രണ്ടു വശങ്ങളിലാകുമ്പോൾ ഇതെല്ലാം ശരിയാകുമോ ?

(i) ഈ ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണെന്നു തെളിയിക്കുക

(ii) ഈ ചതുർഭുജം ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ രൂപങ്ങളുമാകാൻ, മുകളിലെ കുത്തുകൾ എവിടെ ആയിരിക്കണമെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

(a) സമഭുജസാമാന്തരികം (b) ചതുരം

(c) സമചതുരം

(iii) ഒരു കുത്ത് വരയുടെ മുകളിലും ഒരു കുത്ത് താഴെയുമായി എടുത്താലും ഇതെല്ലാം ശരിയാകുമോ ?

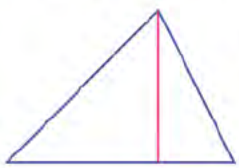
(5) (i) ഏതു ചതുർഭുജത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ii) അകത്തെ ചതുർഭുജം ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ രൂപങ്ങളുമാകാൻ, ആദ്യത്തെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ എന്തായിരിക്കണമെന്നു വിശദീകരിക്കുക.

(a) സമഭുജസാമാന്തരികം (b) ചതുരം (c) സമചതുരം

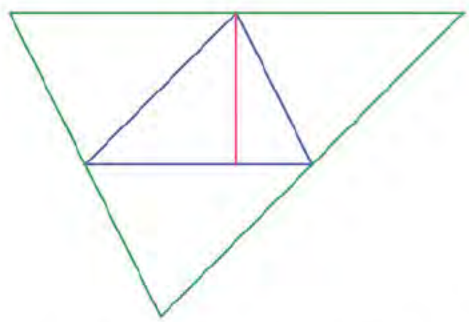
ത്രികോണകേന്ദ്രങ്ങൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂലയിൽ നിന്ന് താഴത്തെ വശത്തേക്ക് ലംബം വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ ഏതു മൂലയിൽ നിന്നും എതിർവശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കാമല്ലോ. ഈ ലംബങ്ങളെ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരങ്ങൾ (altitudes) എന്നാണ് പറയുന്നത് (ഉന്നതികൾ എന്നും പറയാം).

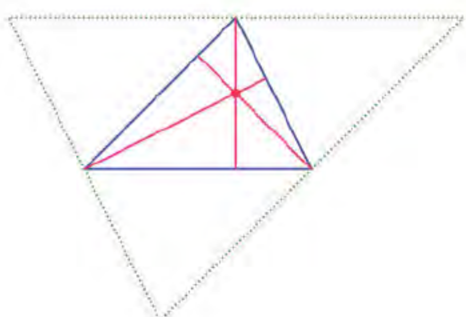
ഇനി ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയിൽനിന്നും എതിർവശത്തിനു സമാന്തരമായ വര വരച്ചാലോ?



ചുവന്ന വര വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ വശത്തിനു ലംബം മാത്രമല്ല, അതിന്റെ സമഭാജിയും കൂടിയാണ്.

അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റ് ഉയരങ്ങളും വരച്ചാൽ, അവ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെയും ലംബസമഭാജികൾ ആകും.

ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും മൂന്നു ലംബസമഭാജികളും ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ പരസ്പരം മുറിച്ചുകടക്കുമെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ:



ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നും എതിർവശത്തേക്കുള്ള ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഇവ മൂന്നും ഒരേ ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നുണ്ടോ? ഇവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു (ലംബകേന്ദ്രം) അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ. ലംബകേന്ദ്രം എല്ലായ്പ്പോഴും ത്രികോണത്തിനകത്തു തന്നെയാണോ? ഒരു കോൺ മട്ടമാകുമ്പോൾ ലംബകേന്ദ്രത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തിന് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? മട്ടത്തേക്കാൾ കൂടിയാലോ?

വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബസമഭാജികൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതികൾ ആണ്.

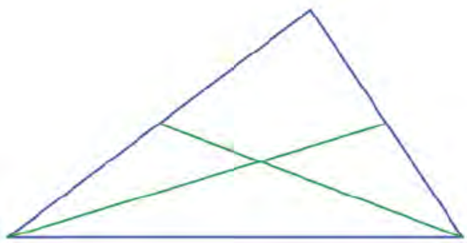
അപ്പോൾ ഇവിടെ കണ്ടത് എന്താണ് ?

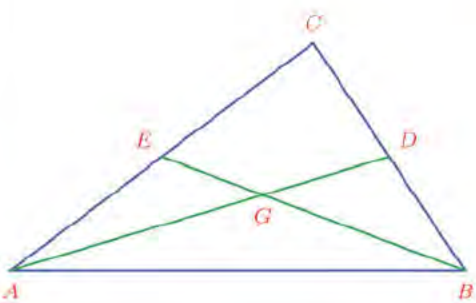
ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും ഉന്നതികളെല്ലാം ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും.

ഉന്നതികൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ഈ ബിന്ദുവിനെ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രം (orthocentre) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കുന്ന ചില സവിശേഷ വരകളാണ് ലംബസമഭാജികളും, ഉന്നതികളും. ഇതുപോലെയുള്ള മറ്റു വരകളാണ്, ഓരോ മൂലയും എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും ചേർത്തു വരയ്ക്കുന്ന വരകൾ. ഇവയുടെ പേര് നടുവരകൾ (medians) എന്നാണെന്ന് നേരത്തെ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇവയും ഒറ്റബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമോ ?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



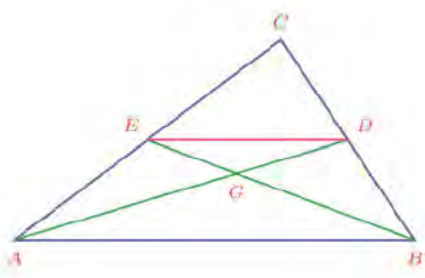


ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു നടുവരകൾ വരച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടിത്തന്നെ മൂന്നാമത്തെ നടുവരയും കടന്നുപോകുമോ എന്നാണ് അറിയേണ്ടത്.

വരച്ചു നോക്കാം. പക്ഷേ എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളിലും ഇതു ശരിയാണെന്നതിന് തെളിവു വേണ്ടേ ? അതിന്, ചിത്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം പേരു കൊടുക്കാം:

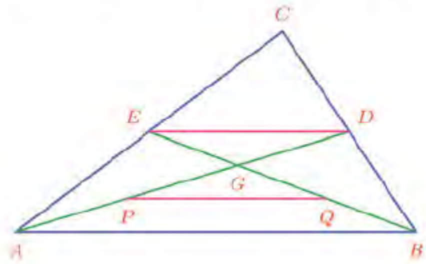
ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരവും അതിന്റെ പകുതിയുമാണ്; അതായത്,

$$ED = \frac{1}{2}AB$$



ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയിൽനിന്നും എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലേക്ക് വരയ്ക്കുക (നടുവര). മൂന്ന് നടുവരകളും ഒരേ ബിന്ദുവിലാണോ കൂട്ടിമുട്ടുന്നത് ? ഈ ബിന്ദു (മധ്യമകേന്ദ്രം) അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഓരോ മൂലയിൽനിന്നും മധ്യമകേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള അകലവും അവിടെ നിന്ന് എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലവും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ അകലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ് ? ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ.

ഇനി താഴത്തെ വശത്തിന്മേൽത്തന്നെ GAB എന്ന മറ്റൊരു ചെറിയ ത്രികോണമുണ്ടല്ലോ; അതിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ കൂടി യോജിപ്പിച്ചാലോ ?



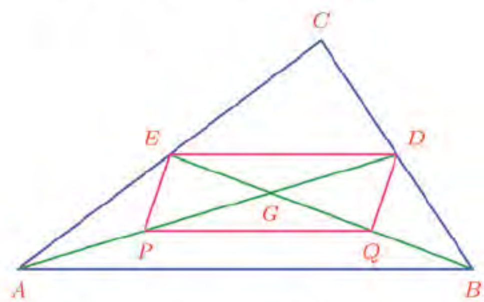
$$PQ = \frac{1}{2}AB$$

അപ്പോൾ,

$$PQ = ED$$

$PQDE$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിലെ, PQ, ED എന്നീ വശങ്ങൾ തുല്യവും സമാന്തരവുമായതിനാൽ, ഈ ചതുർഭുജമൊരു സാമാന്തരികമാണ്; അതിനാൽ അവയുടെ വികർണ്ണങ്ങളായ PD, QE ഇവ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യും; അതായത്,

$$PG = GD \qquad QG = GE$$



AG യുടെ മധ്യബിന്ദു P യും BG യുടെ മധ്യബിന്ദു Q യും ആയതിനാൽ

$$AP = PG \qquad BQ = QG$$

അപ്പോൾ,

$$AG = AP + PG = 2PG = 2GD$$

എന്നും

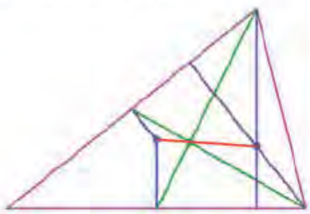
$$BG = BQ + QG = 2QG = 2GE$$

എന്നും കിട്ടും.

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം അടയാളപ്പെടുത്തുക. (Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നതെങ്കിൽ Midpoint or Centre ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മധ്യമകേന്ദ്രം ലഭിക്കും). മധ്യമകേന്ദ്രവും ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് മൂലകളും ചേർത്ത് ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇത്തരത്തിൽ മൂന്ന് ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാമല്ലോ. ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ കാണുക. അവ തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം ? ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

ഓയ്‌ലർ വര

ഏതു ത്രികോണത്തിലും പരിവൃത്തകേന്ദ്രം, മധ്യമകേന്ദ്രം, ലംബകേന്ദ്രം ഇവ ഒരേ വരയിലായിരിക്കും എന്ന് പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പ്രസിദ്ധ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഓയ്‌ലർ കണ്ടുപിടിച്ചു. ഓയ്‌ലർ വര (Euler line) എന്നാണ് ഈ വര അറിയപ്പെടുന്നത്.



ചിത്രത്തിൽ നീല വരകൾ, രണ്ടു വശങ്ങളുടെ ലംബസമഭാജികളാണ്, ഇവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു, പരിവൃത്തകേന്ദ്രം. പച്ച വരകൾ, നടുവരകൾ; അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്നത്, മധ്യമ കേന്ദ്രം, വയലറ്റ് വരകൾ ഉന്നതികൾ; അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്നത്, ലംബകേന്ദ്രം.

ഈ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും കടന്നുപോകുന്ന ചുവന്ന വരയാണ്, ഓയ്‌ലർ വര.

ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും മധ്യമകേന്ദ്രം, പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിന്റെയും ലംബകേന്ദ്രത്തിന്റെയും ഇടയ്ക്കായിരിക്കുമെന്നും, ഇവയെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കും എന്നുകൂടി ഓയ്‌ലർ തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ പരിവൃത്ത കേന്ദ്രവും മധ്യമകേന്ദ്രവും ലംബകേന്ദ്രവും കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വര വരയ്ക്കുക. (ഓയ്‌ലർ വര). ഇത് മൂന്നാമത്തെ ബിന്ദുവിലൂടെയും കടന്നുപോകുന്നുണ്ടോ? ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റിനോക്കൂ. രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമാകുമ്പോൾ ഓയ്‌ലർ വരയ്ക്ക് എന്തു സംഭവിക്കും ? മൂന്നു വശങ്ങളും തുല്യനീളമാകുമ്പോൾ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾക്കും എന്ത് സംഭവിക്കും ?

അതായത്, G എന്ന ബിന്ദു, AD, BE എന്നീ വരകളെ $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു. ഇനി A, B ഇവയെ എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്നതിനു പകരം, B, C എന്നീ മൂലകളെ എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ ?

അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു BE യെ $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കും; അതായത്, മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു G തന്നെയാണ്.

ഇപ്പോൾ കണ്ട കാര്യം എങ്ങനെ പറയാം ?

ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും നടുവരകൾ മൂന്നും ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും; ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നും ഈ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം, എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്; അതായത്, ഈ ബിന്ദു നടുവരകളെയെല്ലാം $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കും.

നടുവരകളെല്ലാം കടന്നുപോകുന്ന ഈ ബിന്ദുവിന് ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം (centroid) എന്നാണ് പേര്.

(1) ഒരു മട്ടത്രികോണം വരച്ച്, കർണ്ണത്തിന്റെ മധ്യ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് പാദത്തിലേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക:

(i) ഈ ലംബം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക

(ii) വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽനിന്ന് മൂന്നു മൂലകളിലേയ്ക്കുമുള്ള അകലം തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(iii) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം, കർണ്ണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(2) ഏതു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെയും, പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം, ലംബകേന്ദ്രം, മധ്യമകേന്ദ്രം ഇവയെല്ലാം ഒരേ ബിന്ദുവാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(3) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തെ നടുവരകൾ ആറു ചെറു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഈ ആറു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ പരപ്പളവാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിൽ, മധ്യമകേന്ദ്രവും മൂന്നു മൂലകളും യോജിപ്പിച്ച്, ത്രികോണത്തെ മൂന്നു ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

മൂന്നു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ പരപ്പളവാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(5) ചിത്രത്തിലെ നീലത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാണ് ചെറിയ പച്ച ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നത്. ചുവന്ന വര വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു നടുവരയാണ്.

സമതുലനം

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ കണക്കുകൂട്ടലുകളിൽ പലപ്പോഴും ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഭാരം മുഴുവൻ ഒരു ബിന്ദുവിൽ കേന്ദ്രീകരിച്ചതായി സങ്കല്പിക്കാറുണ്ട്. ഈ ബിന്ദുവിനെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രം (center of mass) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇത് പ്രയോഗത്തിൽ അനുഭവപ്പെടുന്നത്, ഈ ബിന്ദുവിൽ മാത്രം താങ്ങുകൊടുത്ത് അതിനെ വീഴാതെ നിർത്താം എന്നതിലൂടെയാണ്.

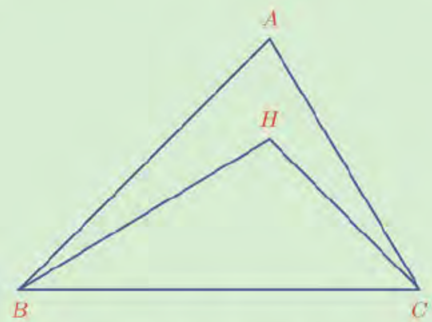
കട്ടികടലാസിലോ, തകിടിലോ വെട്ടിയെടുത്ത ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രം, അതിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം തന്നെയാണ്.

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയിൽനിന്നും എതിർ വശത്തേക്കുള്ള ലംബം വരച്ച് എതിർവശവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രം അടയാളപ്പെടുത്തി ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ ലംബകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരച്ചുനോക്കൂ (Circle through 3 Points ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം). ലംബങ്ങൾ എതിർവശവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളും ഒരു വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയല്ലേ ? ഈ ഒമ്പത് ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഈ വൃത്തത്തെ Nine Point Circle എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.

(i) ഈ നടുവര, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മുകൾവശത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നുവെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ii) വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും മധ്യമകേന്ദ്രമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(6) ചിത്രത്തിൽ, ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രമാണ് H.



HBC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രം A ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.