# 5

# അഭിന്നകഗുണനം

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ  നീളം, വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങായി പറയാൻ കഴിയില്ലെന്നു **പുതിയ സംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം ഏകകമായി എടുത്താൽ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം ഒരു ഭിന്നസംഖ്യകൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയില്ല.

ഈ നീളത്തെ $\sqrt{2}$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ടാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എന്നും കണ്ടു. ഇതുപോലെയുള്ള മറ്റു ചില പുതിയ സംഖ്യകളും പരിചയപ്പെട്ടു (ഇത്തരം മറ്റൊരു സംഖ്യ **വൃത്തങ്ങളുടെ അളവുകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കാണാം).

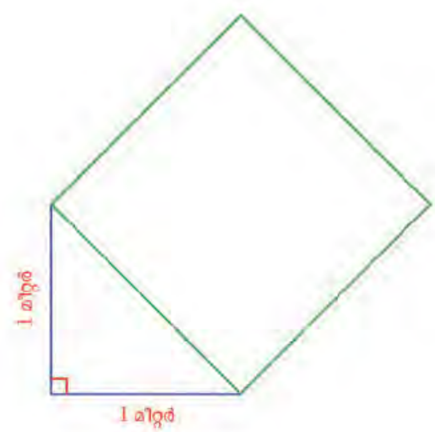
ഇങ്ങനെ ഏതെങ്കിലും ഏകകത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സംഖ്യകളെയെല്ലാം **അഭിന്നകസംഖ്യകൾ (Irrational numbers)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

അഭിന്നകസംഖ്യകൾ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്ന നീളങ്ങൾ ചേർത്തുവയ്ക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങൾ, അത്തരം സംഖ്യകൾ കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയായി രൂപപ്പെടുന്നതും കണ്ടു.

ഇനി പരപ്പളവുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില സന്ദർഭങ്ങൾ, ഇത്തരം സംഖ്യകളുടെ ഗുണനം എന്ന ക്രിയയിലേക്ക് നയിക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം.

## ഗുണനം

ഈ ചിത്രം പല തവണ കണ്ടതാണല്ലോ; ഇതിലെ സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്?



അതിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെയും നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്ററാണെന്നറിയാം; അപ്പോൾ ചുറ്റളവ് കിട്ടാൻ ഇതിന്റെ നാലു മടങ്ങ് കണക്കാക്കിയാൽ മതി;

അതായത് $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$

മറ്റു സംഖ്യകളിലെന്നപോലെ $\sqrt{2}$ ന്റെ 4 മടങ്ങിനെയും $4\times\sqrt{2}$ എന്നോ $\sqrt{2}\times 4$ എന്നോ എഴുതാം; ഇതു സാധാരണയായി ഗുണനചിഹ്നം ഇല്ലാതെ, $4\sqrt{2}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

$$4\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$$

ഈ സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ നാലു മടങ്ങ് എടുക്കണം:

$$4 \times 1.4, \quad 4 \times 1.41, \quad 4 \times 1.414, \ldots$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായെടുത്താൽ,

$4 \times 1.414 = 5.656$ മീറ്റർ.

ഇതുപോലെ $\sqrt{2}$ ന്റെ പകുതിയെ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്;


$\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ പകുതി എടുത്താൽ, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടും; അതായത്,

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.7071\ldots$$

ഇനി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക.

ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു സമഭുജത്രികോണങ്ങളിൽ ഒന്നിനെ മട്ടത്രികോണങ്ങളായി മുറിച്ച്, മറ്റൊന്നിന്റെ ഇരുവശത്തും മാറ്റിയടുക്കി ഒരു ചതുരമാക്കിയിരിക്കുന്നു.


ഈ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

വശങ്ങളുടെ നീളം നമുക്കറിയാം:

വശങ്ങളുടെ നീളം ഭിന്നസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ ഗുണനഫലമാണ് പരപ്പളവ്.

ഇവിടെയും പരപ്പളവ്, വശങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായ $2\sqrt{3}$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണോ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 2 മീറ്ററും, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{3}$ ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളും ആയ ചതുരങ്ങൾ ഇതിനുള്ളിൽ വരച്ചു നോക്കാം:


തുടർന്ന് അകത്തെ ചതുരങ്ങളുടെ ഉയരങ്ങൾ 1.73 മീറ്റർ, 1.732 മീറ്റർ, ... എന്നിങ്ങനെ എടുക്കുമ്പോൾ അവയുടെ പരപ്പളവുകൾ ഈ സംഖ്യകളുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് ചതുരശ്രമീറ്ററാണെന്നു കിട്ടും.

ജ്യാമിതീയമായി നോക്കിയാൽ ഇങ്ങനെ അകത്തു വരയ്ക്കുന്ന ചതുരങ്ങൾ പുറത്തെ ചതുരത്തിന്റെ അടുത്തടുത്തേക്കു നീങ്ങുകയാണല്ലോ. അതിനാൽ അവയുടെ പരപ്പളവുകൾ, പുറത്തെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനോട് അടുത്തടുത്തുവരും.

അതായത്

$$2 \times 1.7, \qquad 2 \times 1.73, \qquad 2 \times 1.732, \ldots$$

എന്നീ സംഖ്യകൾ, പുറത്തെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനോട് അടുത്തടുത്തുവരും.

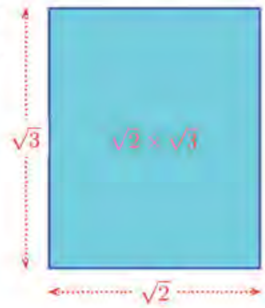
നേരത്തെ പറഞ്ഞതുപോലെ, ഈ സംഖ്യകൾ സമീപിക്കുന്നത് $2\sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയെ ആണല്ലോ.

അങ്ങനെ വശങ്ങളുടെ നീളം 2 ഉം $\sqrt{3}$ ഉം ആയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $2\sqrt{3}$ ആണെന്നു കിട്ടി.

ഇനി ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ എന്നായാലോ?

ഈ പരപ്പളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ടാണ്.

ഇതിനെ സംഖ്യാപരമായി വിശദീകരിക്കാൻ, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ എന്നിവയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ക്രമമായി ഗുണിച്ച്, വേണ്ടത്ര ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾ വരെ എടുക്കണം.




$$\begin{array}{cccccc} 1.4 & 1.41 & 1.414 & \dots & \rightarrow & \sqrt{2} \\ 1.7 & 1.73 & 1.732 & \dots & \rightarrow & \sqrt{3} \\ \hline 2.4 & 2.44 & 2.449 & \dots & \rightarrow & \sqrt{2}\times\sqrt{3} \end{array}$$

അതായത്

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3} = 2.449\dots$$

ഇവിടെ ന്യായമായും ഒരു സംശയം ഉണ്ടാകാം.

എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയ വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമൂലത്തിനു തുല്യമാണ്.

**ദശാംശക്കണക്ക്**

ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെ ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനം വരെ ചുരുക്കിയെഴുതുമ്പോൾ, അടുത്ത സ്ഥാനത്തെ അക്കം 5 അല്ലെങ്കിൽ 5 ൽ കൂടുതലാണെങ്കിൽ, നമുക്കു വേണ്ട സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയാണ് എടുക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി $1.7 \times 1.4 = 2.38$ ആയതിനാൽ, ഈ ഗുണനഫലത്തെ ഒരു ദശാംശ സ്ഥാനത്തേക്ക് ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് 2.4 എന്നാണ്.

ഉദാഹരണമായി.

$$\sqrt{4}\times\sqrt{25} = 2\times 5 = 10$$

എന്നു കണക്കാക്കുന്നതുപോലെ,

$$\sqrt{4}\times\sqrt{25} = \sqrt{4\times 25} = \sqrt{100} = 10$$

എന്നും കണക്കാക്കാം.

ഇതുപോലെ $\sqrt{\frac{1}{4}}\times\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

എന്നും

$$\sqrt{\frac{1}{4}}\times\sqrt{\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$$

എന്നും കണക്കാക്കാം.

എന്നാൽ ഇതുപോലെ $\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{6}$ ആകുമോ ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുന്ന 2.4, 2.44, 2.449, ... എന്നീ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 6 ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുമോ എന്നു പരിശോധിക്കണം.

$$\begin{aligned} 2.4^2 &= 5.76 \\ 2.44^2 &\approx 5.95 \\ 2.449^2 &\approx 5.998 \end{aligned}$$

ഇവയുടെ വർഗങ്ങൾ 6 ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുന്നതിനാൽ

$$\sqrt{6} = 2.449\dots$$

നേരത്തെ $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ആയി കിട്ടിയതും ഇതുതന്നെയല്ലേ?

അപ്പോൾ

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

2 നും 3 നും പകരം മറ്റു സംഖ്യകളെടുത്താലും, ഇതു പോലെതന്നെ വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമൂലമാണെന്നു കാണാം. അതായത്,

$x$, $y$ എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും
$$\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

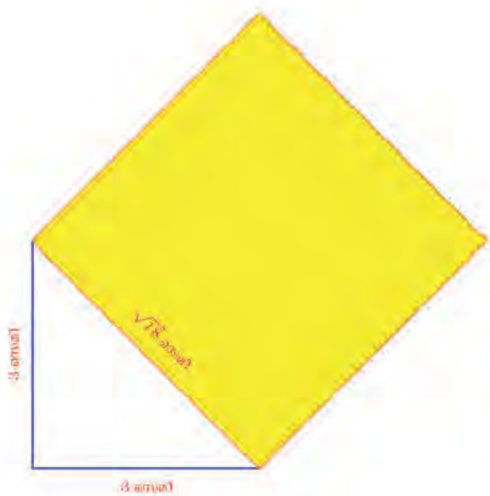
വർഗമൂലങ്ങൾ ലഘൂകരിച്ചെഴുതാൻ ഇതുപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, രണ്ടു ലംബവശങ്ങളും 3 സെന്റിമീറ്ററായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം നോക്കാം.

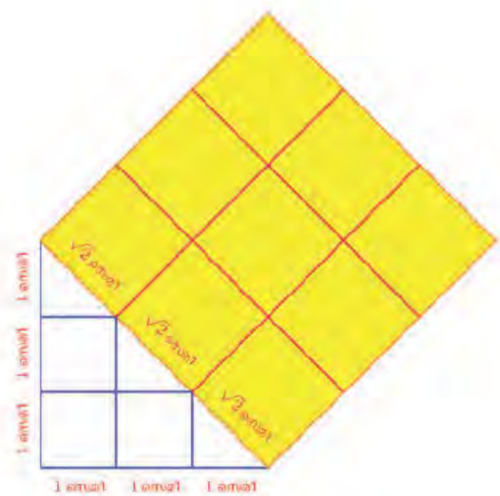
പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, കർണ്ണം വശമായ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $3^2 + 3^2 = 18$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ, അപ്പോൾ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{18}$ സെന്റിമീറ്റർ

ഇനി 18 നെ $9 \times 2$ എന്നെഴുതിയാൽ ഇത് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

ഇക്കാര്യം ജ്യാമിതീയമായും കാണാം:




## ഗുണനവും വർഗമൂലവും

$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുന്ന സംഖ്യകൾ 2.4, 2.44, 2.449, ... എന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇവയുടെ വർഗങ്ങൾ 6 ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

$$1.4 \times 1.7,\ 1.41 \times 1.73,\ 1.414 \times 1.732,\ \dots$$

എന്നീ ഗുണനഫലങ്ങളോട് ഏകദേശം തുല്യമായ സംഖ്യകളായിട്ടാണല്ലോ ഈ സംഖ്യകൾ കിട്ടിയത്. ഇവയുടെ വർഗങ്ങൾ

$$(1.4 \times 1.7)^2,\ (1.41 \times 1.73)^2,$$
$$(1.414 \times 1.732)^2,\ \dots$$

ഈ ഗുണനഫലങ്ങളെ, വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാമല്ലോ.

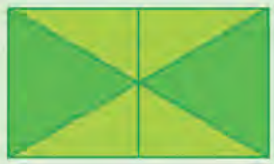
$$(1.4 \times 1.7)^2 = 1.4^2 \times 1.7^2$$

$$(1.41 \times 1.73)^2 = 1.41^2 \times 1.73^2$$

$$(1.414 \times 1.732)^2 = 1.414^2 \times 1.732^2$$

വലതുവശത്തെ ഗുണനഫലങ്ങളിൽ, $1.4^2$, $1.41^2$, $1.414^2$, ... എന്നീ സംഖ്യകൾ 2 ന്റെ അടുത്തടുത്തുവരുന്ന സംഖ്യകളും, $1.7^2$, $1.73^2$, $1.732^2$, ... എന്നീ സംഖ്യകൾ 3 ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുന്ന സംഖ്യകളും. അപ്പോൾ അവയുടെ ഗുണനഫലങ്ങൾ 6 ന്റെ അടുത്തടുത്തുവരുന്നു.

(1) ഒരേ വലുപ്പമുള്ള നാലു സമഭുജത്രികോണങ്ങളിൽ രണ്ടെണ്ണം നെടുകെ മുറിച്ചതും, രണ്ടെണ്ണം മുഴുവനായും ചേർത്തുവച്ച് ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കാം:

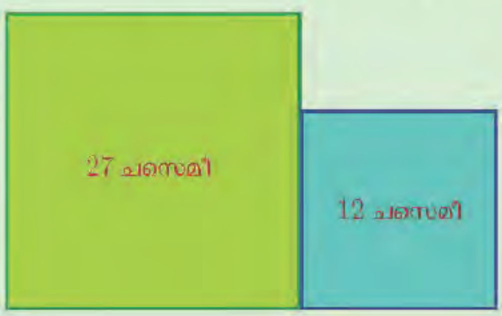


സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും എത്രയാണ് ?

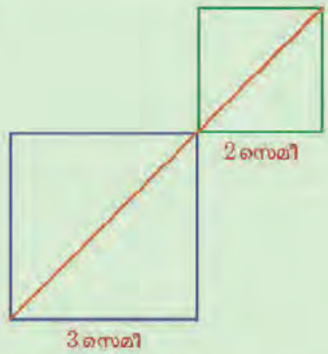
(2) ഒരു സമചതുരവും, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ രണ്ടു മടങ്ങു നീളമുള്ള വശങ്ങളോടുകൂടിയ ഒരു സമഭുജത്രികോണവും ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ മുറിച്ചു മാറ്റിയടുക്കി ഒരു ലംബകമുണ്ടാക്കാം:

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, ലംബകത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, പരപ്പളവും എത്രയായിരിക്കും ?

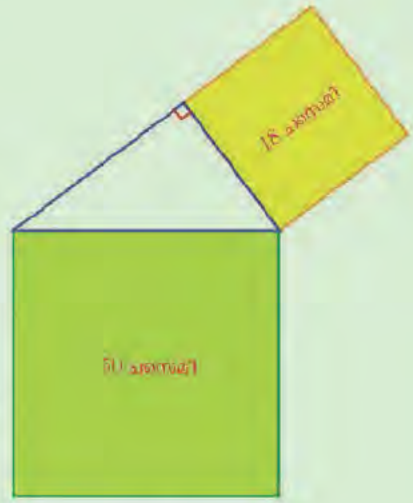
(3) രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ച രൂപമാണ് ചിത്രത്തിൽ. ഈ രൂപത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം, സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.



(4) രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ ഒരു മൂലയിൽ ചേർത്തുവച്ച രൂപമാണ് ചിത്രത്തിൽ. ചരിഞ്ഞ വരയുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക.




(5) ചിത്രത്തിലെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും കണക്കാക്കുക.




(6) ചുവടെയുള്ള സംഖ്യാജോടികളിൽ ചിലതിന്റെ ഗുണനഫലം എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആണ്. അവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\sqrt{3}, \sqrt{12}$ (ii) $\sqrt{3}, \sqrt{1.2}$ (iii) $\sqrt{5}, \sqrt{8}$

(iv) $\sqrt{0.5}, \sqrt{8}$ (v) $\sqrt{7\frac{1}{2}}, \sqrt{3\frac{1}{3}}$ (vi) $\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{1}{10}}$

## ഹരണം

$2 \times 3 = 6$ എന്ന ഗുണനത്തിനെ $\frac{6}{2} = 3$ എന്നോ, $\frac{6}{3} = 2$ എന്നോ ഹരണമായും എഴുതാമല്ലോ. ഇതുപോലെ $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ എന്ന ഗുണനത്തെയും ഹരണമായി എഴുതാം.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയ ഏത് $x, y$ എടുത്താലും $x \times y = z$ എന്ന ഗുണനത്തിനെ $\frac{z}{x} = y$ എന്നും, $\frac{z}{y} = x$ എന്നും ഹരണമായി എഴുതാം.

ഇതുപോലെ,

> $x, y$ എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും,
>
> $$\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{z}$$
>
> എന്ന ഗുണനത്തെ ഹരണമായി
>
> $$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} = \sqrt{y} \qquad \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}$$
>
> എന്നെഴുതാം.

ഇനി $\frac{6}{2}=3$ ഉം $\frac{6}{3}=2$ ഉം ആയതിനാൽ

$$\sqrt{\frac{6}{2}}=\sqrt{3}, \qquad \sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{2}$$

എന്നും കാണാം. നേരത്തെ കണ്ടതെന്താണ്?

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

ഈ രണ്ടു ജോടി സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന്

$$\sqrt{\frac{6}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \qquad \sqrt{\frac{6}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

എന്നെല്ലാം കാണാം

ഇതുപോലെ

$$\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{3\times\frac{2}{3}}=\sqrt{2}$$

എന്നും തുടർന്ന് ഈ ഗുണനത്തെ ഹരണമായി

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

എന്നും എഴുതാം

$x, y$ എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

ഇനി ഇത്തരം വർഗമൂലങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. ഉദാഹരണമായി $\sqrt{\frac{1}{2}}$ കണക്കാക്കാൻ ആദ്യം

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

എന്നെഴുതാം. തുടർന്ന് $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഏതെങ്കിലും ദശാംശസംഖ്യകൊണ്ട് ഒന്നിനെ ഹരിച്ച്, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപം കണക്കാക്കാം:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\approx\frac{1}{1.414}=0.707$$

മറ്റൊരു എളുപ്പവഴിയുണ്ട്; $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ ആയതിനാൽ ഇങ്ങനെ കണക്കുകൂട്ടാം:

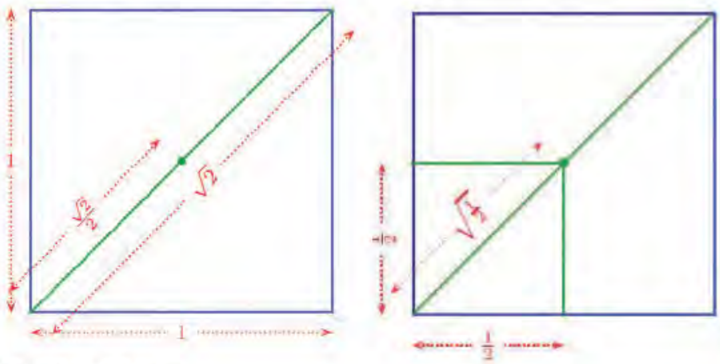
$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ഇനി

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx\frac{1.414}{2}=0.707$$

എന്നും എളുപ്പത്തിൽ കാണാമല്ലോ.

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ എന്നത്, ജ്യാമിതീയമായും കാണാം:




ഇതുപോലെ

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

എന്നും കണക്കാക്കാം

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

> $x$ ഏത് അധിസംഖ്യയായാലും
>
> $$\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x}{x^2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

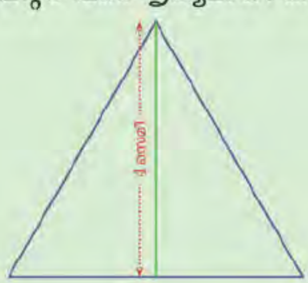
(1) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഇതുപയോഗിച്ച്

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

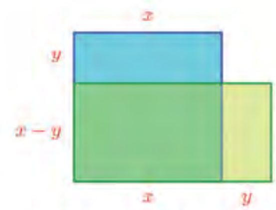
(2) ചിത്രത്തിൽ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.



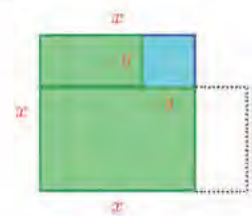
## ഗുണനസമവാക്യം

$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ജ്യാമിതി ഓർമ്മയുണ്ടോ ?

വശങ്ങളുടെ നീളം $x$ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $y$ കൂട്ടി, മറ്റേ വശം $y$ കുറച്ച്, ഒരു ചതുരം വരച്ചുവെന്നു കരുതുക.




ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $(x+y)(x-y)$. ചതുരത്തിന്റെ വലത്തോട്ട് നീണ്ടു നിൽക്കുന്ന ഭാഗം മുറിച്ചെടുത്ത്, മുകളിൽ വച്ചാലോ ?




ഈ ചിത്രത്തിലെ പച്ചഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $x^2-y^2$

ഇത് ആദ്യം വരച്ച പച്ചച്ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് തന്നെയല്ലേ ?

നീളങ്ങൾ അഭിന്നകസംഖ്യകൾ ആയാലും പരപ്പളവ് ഗുണനഫലം തന്നെയാണല്ലോ. അപ്പോൾ $x$, $y$ അഭിന്നകസംഖ്യകൾ ആയാലും $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ തന്നെയാണ്.

ഇതുപോലെ മറ്റു സർവസമവാക്യങ്ങളും അഭിന്നകസംഖ്യകൾക്ക് ശരിയാണെന്നു കാണാം.

(3) ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളെല്ലാം സമഭുജമാണ്. പുറത്തെ സമചതുരത്തിന്റെയും, അകത്തെ സമചതുരത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ് ?

(4) $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ എന്നും $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$ എന്നും തെളിയിക്കുക. ഇതു പോലുള്ള മറ്റു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ ?

(5) ചുവടെയുള്ള സംഖ്യാജോടികളിൽ ആദ്യസംഖ്യയെ രണ്ടാം സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ചിലത് എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ കിട്ടും. അവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\sqrt{72}, \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{27}, \sqrt{3}$ (iii) $\sqrt{125}, \sqrt{50}$

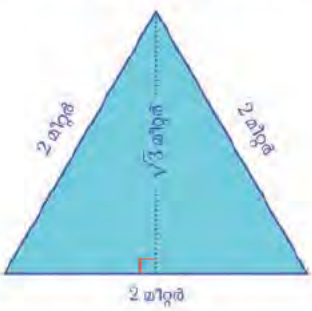
(iv) $\sqrt{10}, \sqrt{2}$ (v) $\sqrt{20}, \sqrt{5}$ (vi) $\sqrt{18}, \sqrt{8}$

## ത്രികോണപ്പരപ്പുകൾ

ഭിന്നസംഖ്യകളായി എഴുതാൻ കഴിയാത്ത ചില നീളങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ് $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾ നിർവചിച്ചത്. തുടർന്ന് ചില ചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാനും ഇത്തരം സംഖ്യകൾ ആവശ്യമാണെന്നു കണ്ടു.

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആണെങ്കിൽ, പരപ്പളവും അങ്ങനെതന്നെ ആയിരിക്കും. എന്നാൽ വശങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ അങ്ങനെയാകണമെന്നില്ല.

ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളെല്ലാം 2 മീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം $\sqrt{3}$ മീറ്റർ ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ:

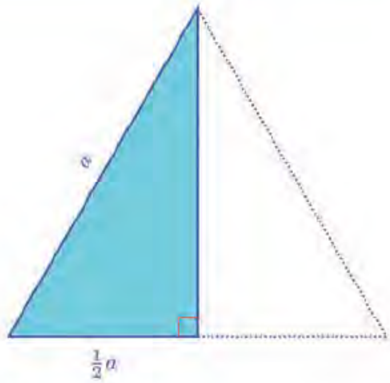



ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

$\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ

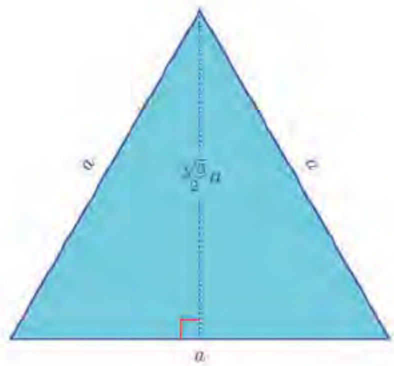
ഇതുപോലെ ഏതു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമല്ലോ. വശത്തിന്റെ നീളം (സെന്റിമീറ്ററോ, മീറ്ററോ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഏകകം ഉപയോഗിച്ച് അളന്നപ്പോൾ) $a$ എന്നെടുത്താൽ, അതിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ് ?

ഇതിനുള്ളിലെ രണ്ടു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണവും താഴത്തെ വശവും എഴുതാമല്ലോ:




അപ്പോൾ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ വർഗം

$$a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$$




ഇതിൽ നിന്ന് ഈ വശത്തിന്റെ നീളം

$$\sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

ഇതാണ് സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം.

ഇനി പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമല്ലോ:

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

അതായത്,

**ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം, വശത്തിന്റെ പകുതിയുടെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങും, പരപ്പളവ്, വശത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങുമാണ്.**

ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളെല്ലാം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം $4\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്റർ; പരപ്പളവ് $16\sqrt{3}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇതുപോലെ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ഒരു വശം 4 സെന്റിമീറ്ററും, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ 6 സെന്റിമീറ്ററുമായ ത്രികോണം നോക്കുക:

ഇതിലും മുകളിലെ മൂലയിൽനിന്നുള്ള ലംബം, താഴത്തെ വശത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യുമല്ലോ (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠം).

അപ്പോൾ സമഭുജത്രികോണത്തിൽ ചെയ്തപോലെ ഇതിലും ഉയരത്തിന്റെ വർഗം കണക്കാക്കിക്കൂടേ ?

$$\text{ഉയരത്തിന്റെ വർഗം} = 6^2 - 2^2 = 32$$

അപ്പോൾ ഉയരം

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ സെമീ}$$

ഇനി പരപ്പളവും കണക്കാക്കാം

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ ചസെമീ}$$

ഇതേ രീതിയിൽ ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാം (അല്പം കൂടി കണക്കുകൂട്ടണം എന്നേയുള്ളൂ). ഉദാഹരണമായി, ഈ ത്രികോണം നോക്കുക:


ആദ്യം ഇതിന്റെ ഉയരം കണ്ടുപിടിക്കണം. ഇത് $h$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നും, ഈ ലംബം താഴത്തെ വശത്തെ മുറിക്കുന്ന ഒരു കഷണത്തിന്റെ നീളം $x$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നും എഴുതിനോക്കാം:


അപ്പോൾ ഇടതുവശത്തെ മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$x^2 + h^2 = 49$$

എന്നും, വലതുവശത്തെ മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$(8 - x)^2 + h^2 = 9$$

എന്നും കിട്ടുമല്ലോ.

ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് രണ്ടാമത്തേത് കുറച്ചാൽ

$$x^2 - (8 - x)^2 = 40$$

എന്നും കിട്ടും.

വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമായി എഴുതാമെന്ന് എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ:

$$x^2 - (8 - x)^2 = (x + (8 - x))\,(x - (8 - x))$$

$$= 8(2x - 8)$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമവാക്യം

$$8(2x - 8) = 40$$

എന്നാകും. ഇതിൽനിന്ന് $2x - 8 = 5$ എന്നും, തുടർന്ന് $x = \frac{1}{2}(5 + 8) = 6\frac{1}{2}$

എന്നും കിട്ടും.

ഇനി വീണ്ടും ഇടത്തെ ത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$h^2 = 7^2 - \left(6\frac{1}{2}\right)^2 = 13\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= 6\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 6\frac{3}{4}$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

$$h = \sqrt{6\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

ഇതുപയോഗിച്ച്

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{3}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ ചസെമീ.}$$

ഈ കണക്കുകൂട്ടലുകളിൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം പൊതുവായി $a$, $b$, $c$ എന്നെടുത്താൽ, ഉയരം കണ്ടുപിടിക്കാതെ നേരിട്ട് പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാനുള്ള ഒരു ബീജഗണിതവാചകം കിട്ടും. അത് ഇങ്ങനെയാണ്.

വശങ്ങളുടെ നീളം $a$, $b$, $c$ ആയ ത്രികോണത്തിൽ

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

എന്നെടുത്താൽ, പരപ്പളവ്

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ആറാം ദശകത്തിൽ ഗ്രീസിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ഹെറോൺ എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് ഇതു കണ്ടുപിടിച്ചത്. (ഇത് എങ്ങനെ കിട്ടി എന്നറിയാൻ താൽപര്യം ഉണ്ടെങ്കിൽ, പാഠത്തിന്റെ അവസാനമുള്ള അനുബന്ധം നോക്കുക).

ഉദാഹരണമായി, ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്കിൽ

$$a = 8 \quad b = 7 \quad c = 3$$

എന്നെടുത്താൽ

$$s = \frac{1}{2}(8 + 7 + 3) = 9$$

തുടർന്ന്

$$s-a=1$$

$$s-b=2$$

$$s-c=6$$

എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ

$$\text{പരപ്പളവ്} = \sqrt{9\times1\times2\times6} = \sqrt{9\times4\times3} = 6\sqrt{3}$$

(1) ചില സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(i) 10 സെ.മീ. (ii) 5 സെ.മീ. (iii) $\sqrt{3}$ സെ.മീ.

(2) വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(3) ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക.

(4) സമാന്തരവശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക.

(5) വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക.

(6) ചില ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(i) 4 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ, 7 സെന്റിമീറ്റർ

(ii) 4 സെന്റിമീറ്റർ, 13 സെന്റിമീറ്റർ, 15 സെന്റിമീറ്റർ

(iii) 5 സെന്റിമീറ്റർ, 12 സെന്റിമീറ്റർ, 13 സെന്റിമീറ്റർ

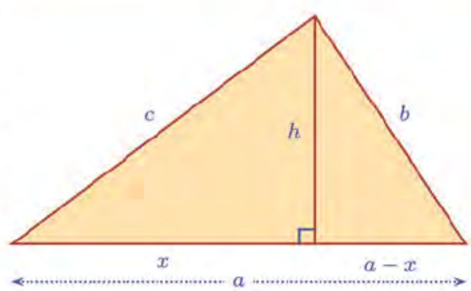
### സ്ഥലപ്പരപ്പ്

അതിർത്തികളെല്ലാം നേർവരകളായ സ്ഥലങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാനുള്ള ഒരു മാർഗം, ആദ്യം അതിനെ ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ച്, വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ കണക്കാക്കുകയാണ്.


ഇനി ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്, ഹെറോൺ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കി, അവയെല്ലാം കൂട്ടിയാൽ സ്ഥലത്തിന്റെ പരപ്പളവായി.

## അനുബന്ധം

പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഹെറോൺ സൂത്രവാക്യം എങ്ങനെ കിട്ടിയെന്നു നോക്കാം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $a$, $b$, $c$ എന്നെടുക്കാം. നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, ഒരു മൂലയിൽ നിന്ന് എതിർവശത്തിലേക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളം $h$ എന്നും, ഈ ലംബം വശത്തെ മുറിക്കുന്ന ഒരു കഷണത്തിന്റെ നീളം $x$ എന്നും എടുക്കാം.



അപ്പോൾ ഇടത്തെ മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$x^2 + h^2 = c^2$$

എന്നും, വലത്തെ മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$(a - x)^2 + h^2 = b^2$$

എന്നും കിട്ടും. ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യം കുറച്ചാൽ

$$x^2 - (a - x)^2 = c^2 - b^2$$

ഇനി $x^2 - (a - x)^2$ എന്ന വർഗവ്യത്യാസത്തെ, തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമായി എഴുതാം:

$$x^2 - (a - x)^2 = (x + (a - x))\,(x - (a - x)) = a(2x - a)$$

അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിൽ നിന്നു കിട്ടിയ സമവാക്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$a(2x - a) = c^2 - b^2$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$2x - a = \frac{c^2 - b^2}{a}$$

എന്നും, തുടർന്ന്

$$2x = \frac{c^2 - b^2}{a} + a = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{a}$$

എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ

$$x = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}$$

ഇനി ഇടത്തെ മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്നു കിട്ടുന്ന

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c + x)\,(c - x)$$

എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $x$ നെ ഇപ്പോൾ കണ്ടതുപോലെ $a, b, c$ ഉപയോഗിച്ച് മാറ്റി എഴുതാമല്ലോ:

$$h^2 = \left(c + \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)\left(c - \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)$$

ഇത് ലഘൂകരിച്ച് ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$$h^2 = \left(\frac{2ac + (c^2 - b^2 + a^2)}{2a}\right)\left(\frac{2ac - (c^2 - b^2 + a^2)}{2a}\right)$$

ആദ്യത്തെ ഭിന്നത്തിന്റെ അംശം ഇങ്ങനെ ലഘൂകരിക്കാം:

$$\begin{aligned} 2ac + (c^2 - b^2 + a^2) &= (a^2 + c^2 + 2ac) - b^2 \\ &= (a + c)^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$= ((a+c)+b)((a+c)-b)$$
$$= (a+c+b)(a+c-b)$$

രണ്ടാമത്തെ ഭിന്നത്തിന്റെ അംശം ഇങ്ങനെയും:

$$\begin{aligned} 2ac-(c^2-b^2+a^2) &= 2ac-c^2+b^2-a^2 \\ &= b^2-(a^2+c^2-2ac) \\ &= b^2-(a-c)^2 \\ &= (b+a-c)(b-(a-c)) \\ &= (b+a-c)(b-a+c) \end{aligned}$$

ഇവ ഉപയോഗിച്ച്, $h^2$ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$h^2 = \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$$

ഇനി ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനെ $p$ എന്നെഴുതിയാൽ

$$p = a+b+c$$

കൂടാതെ

$$\begin{aligned} p-2a &= (a+b+c)-2a=(b+c-a) \\ p-2b &= (a+b+c)-2b=(a-b+c) \\ p-2c &= (a+b+c)-2c=(a+b-c) \end{aligned}$$

എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ

$$h^2 = \frac{p(p-2b)(p-2c)(p-2a)}{4a^2}$$

അടുത്തതായി, ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയെ $s$ എന്നെടുത്താൽ $p=2s$ ആകുമല്ലോ അപ്പോൾ

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{2s(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}{4a^2} \\ &= \frac{2s\times 2(s-b)\times 2(s-c)\times 2(s-a)}{4a^2} \\ &= \frac{4s(s-b)(s-c)(s-a)}{a^2} \end{aligned}$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\times a\times\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$