4

ഹരണരീതികൾ

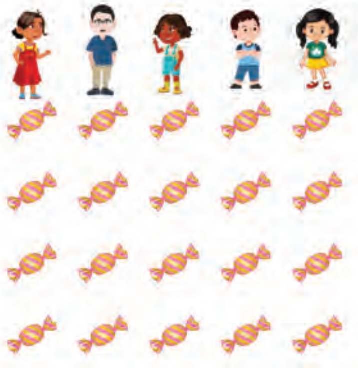
ഹരണവും ഗുണനവും

20 മിഠായി 5 കുട്ടികൾക്ക് ഒരുപോലെ എങ്ങനെ വീതിച്ചു കൊടുക്കും ? ഓരോന്നു വീതം കൊടുത്താൽ 5 അല്ലേ ആയുള്ളൂ.

ഓരോന്നു കൂടി കൊടുത്താലോ ?

അപ്പോൾ 5 ന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ്, $5 \times 2 = 10$ ആയി; ഇനിയും മിഠായി ബാക്കിയുണ്ടല്ലോ ? ഒരിക്കൽക്കൂടി ഓരോന്നു വീതം കൊടുത്താലും $5 \times 3 = 15$; മിഠായി തീർന്നിട്ടില്ല.

4 വീതം കൊടുത്താൽ, $5 \times 4 = 20$ മിഠായിയും തീരും:



കുട്ടികളും മിഠായിയുമെല്ലാം മാറ്റി, സംഖ്യകൾ മാത്രമായി ആലോചിച്ചാൽ, ചോദ്യം ഇതാണ്:

20 നെ ഒരേപോലെയുള്ള 5 ഭാഗങ്ങളാക്കിയാൽ, ഓരോ ഭാഗവും എത്രയാണ് ?

കണക്കുഭാഷയിൽ ഇത് അല്പം കൂടി ചുരുക്കി ഇങ്ങനെയാണ് പറയുന്നത്.

20 നെ 5 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ എന്താണ് ?

ഗണിത ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വീണ്ടും ചുരുക്കാം

$20 \div 5$ എത്രയാണ് ?

ഉത്തരം കണ്ടുപിടിച്ചത് എങ്ങനെയാണ് ?

5 ഭാഗങ്ങളിൽ ഓരോന്നും

- 1 വീതമാണെങ്കിൽ ആകെ 5
- 2 വീതമാണെങ്കിൽ ആകെ 5 ന്റെ 2 മടങ്ങ് $5 \times 2 = 10$
- 3 വീതമാണെങ്കിൽ ആകെ 5 ന്റെ 3 മടങ്ങ് $5 \times 3 = 15$
- 4 വീതമാണെങ്കിൽ ആകെ 5 ന്റെ 4 മടങ്ങ് $5 \times 4 = 20$

അപ്പോൾ, മുകളിൽ ഭാഗവും ഹരണവും ആയി ചോദിച്ചതെല്ലാം, മടങ്ങും ഗുണനവുമായി മാറ്റി എഴുതാം:

ഭാഗവും ഹരണവും	മടങ്ങും ഗുണനവും
20 നെ ഒരേപോലെയുള്ള 5 ഭാഗങ്ങളാക്കിയാൽ, ഓരോ ഭാഗവും എത്രയാണ് ?	5 ന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് 20 ?
20 നെ 5 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ എന്താണ് ?	5 നെ ഏതു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലാണ് 20 കിട്ടുന്നത് ?
$20 \div 5 = ?$	$5 \times ? = 20$

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

40 ലിറ്റർ വെള്ളം, ഒരേ അളവുള്ള 8 കുപ്പികളിൽ നിറച്ചു. ഓരോ കുപ്പിയിലും എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം ഉണ്ടാകും ?

ഇത് സാധാരണ ഭാഷയിൽ ഭാഗങ്ങളായും, കണക്കിന്റെ ഭാഷയിൽ ഹരണമായും ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

ഭാഗവും ഹരണവും	മടങ്ങും ഗുണനവും
40 നെ ഒരേപോലെയുള്ള 8 ഭാഗങ്ങളാക്കിയാൽ, ഓരോ ഭാഗവും എത്രയാണ്?	
40 നെ 8 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ എന്താണ് ?	
$40 \div 8 = ?$	

ഇതിനെ മടങ്ങും ഗുണനവുമായി മാറ്റിയെഴുതി, ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

മറ്റൊരു കണക്ക്:

48 കിലോഗ്രാം അരി, 6 പേർ ഒരുപോലെ വീതിച്ചെടുത്തു. ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര കിലോഗ്രാം കിട്ടി ?

ഇത് ഭാഗവും ഹരണവുമായും, മടങ്ങും ഗുണനവുമായും എഴുതി ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക:

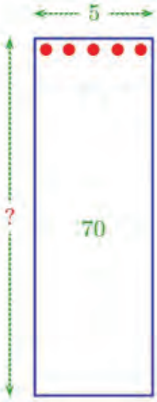
ഭാഗവും ഹരണവും	മടങ്ങും ഗുണനവും

ചതുരഹരണം

ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

75 പൊട്ടുകൾ കൊണ്ടൊരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം; ഒരു വരിയിൽ 5 എണ്ണം വീതം. എത്ര വരികൾ വയ്ക്കാം ?

ഒരു വരി വച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, 70 പൊട്ടുകൾ മിച്ചം.



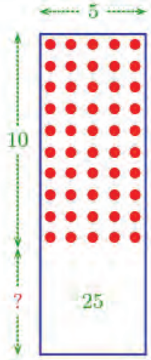
ഒരു വരികൂടി വച്ചാൽ, 65 മിച്ചം.

ഇങ്ങനെ ഓരോന്നായി വയ്ക്കുന്നതിനു പകരം 10 വരികൾ ഒരുമിച്ചു വച്ചാലോ ? എത്രയെണ്ണം വച്ചു ?

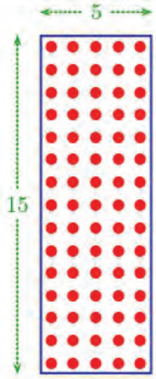
$$5 \times 10 = 50$$

ഇനി എത്രയെണ്ണം കൂടി വയ്ക്കാനുണ്ട് ?

$$75 - 50 = 25$$



ഇനി എത്ര വരികൾ കൂടി വയ്ക്കാം ?



ഇവിടെ കണക്കാക്കിയത് എന്താണ് ?

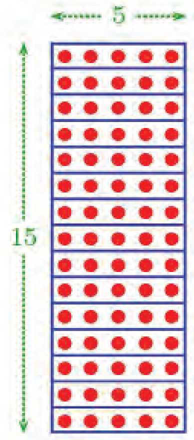
5 ന്റെ 15 മടങ്ങാണ് 75.

അതായത്,

$$5 \times 15 = 75$$

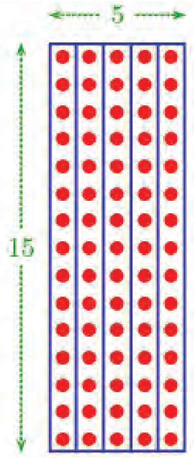
ഭാഗങ്ങളായി പറഞ്ഞാലോ ?

75 നെ 5 വീതമുള്ള ഭാഗങ്ങളാക്കിയാൽ 15 ഭാഗം.



ഇങ്ങനെയും പറയാം:

75 നെ ഒരുപോലെയുള്ള 5 ഭാഗങ്ങളാക്കിയാൽ, ഓരോ ഭാഗത്തിലും 15.



ഹരണമായി പറഞ്ഞാലോ ?

$$75 \div 5 = 15$$

പണക്കണക്ക്

9 പത്തുരൂപാ നോട്ടും 6 ഒറ്റരൂപാ നാണയങ്ങളുമായി 96 രൂപയുണ്ട്. ഇത് 8 പേർക്ക് എങ്ങനെ വീതിക്കും ?

ആദ്യം ഓരൊരുത്തർക്കും ഓരോ പത്തു രൂപാ നോട്ടു കൊടുക്കുക. മിച്ചമുള്ള ഒരു നോട്ട്, ഒറ്റ രൂപാ നാണയങ്ങളാക്കിയാൽ, നേരത്തെ ഉണ്ടായിരുന്ന ആറു നാണയങ്ങളും ചേർത്ത് ആകെ പതിനാറു നാണയങ്ങൾ. ഇത് ഈരണ്ടെണ്ണമായി എട്ടു പേർക്കും കൊടുക്കാമല്ലോ.

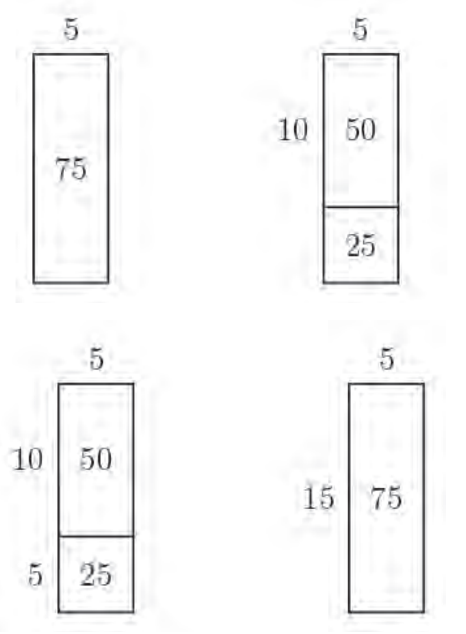
ഈ ചെയ്തതെല്ലാം സംഖ്യാരൂപത്തിൽ ഇങ്ങനെ കാണിക്കാം:

	1	2
	പത്ത്	ഒന്ന്
8	9	6
	8	
		16
		16

ഇത് അല്പംകൂടി ചുരുക്കി ഇങ്ങനെയുമാക്കാം.

```
   12
8 |96
   8
  ---
   16
   16
  ---
    0
```

ഇതു കണക്കാക്കിയ രീതി, പൊട്ടുകളൊന്നും വരയ്ക്കാതെ, സംഖ്യകൾ മാത്രമായി എഴുതിനോക്കാം:



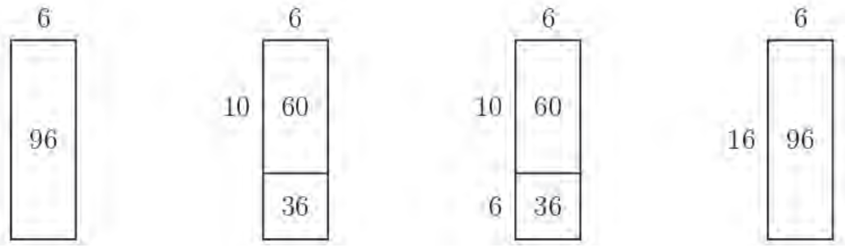
അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം:

96 പൊട്ടുകൾ കൊണ്ടൊരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം; ഒരു വരിയിൽ 6 എണ്ണം വീതം. എത്ര വരികൾ വയ്ക്കാം ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

- 10 വരികൾ വെച്ചാൽ 60; മിച്ചം 36
- $6 \times 6 = 36$ ആയതിനാൽ, ഇനി 6 വരികൾ കൂടി വച്ചാൽ മതി
- ആകെ $10 + 6 = 16$ വരികൾ

കളങ്ങൾ വരച്ച്, ഇങ്ങനെ എഴുതാം:



ഒരു കളം മാത്രം വരച്ച്, ക്രിയകളെല്ലാം ഓരോന്നായി അതിൽത്തന്നെ ചെയ്യാം:

	6	
	96	

	6	
	96−	
10	60	$6 \times 10 = 60$
	36	

	6	
	96−	
10	60	$6 \times 10 = 60$
	36−	
6	36	$6 \times 6 = 36$
$96 \div 6 = 16$	0	$6 \times 16 = 96$

ഇതിൽ അവസാനം $36 = 6 \times 6$ എന്നത് ഓർമ്മ വന്നില്ലെങ്കിൽ, ഇങ്ങനെയും ചെയ്യാം

	6	
	96−	
10	60	$6 \times 10 = 60$
	36−	
5	30	$6 \times 5 = 30$
	6−	
1	6	$6 \times 1 = 6$
$96 \div 6 = 16$	0	$6 \times 16 = 96$

വേറൊരു കണക്കാവാം:

192 രൂപ 8 പേർക്ക് ഒരുപോലെ വീതിച്ചാൽ, ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര രൂപ കിട്ടും ?

എങ്ങനെയാണ് ആലോചിക്കുക ?

- ഓരോരുത്തരും 10 രൂപ വീതമെടുത്താൽ, മൊത്തം 80 രൂപ; $192 - 80 = 112$ രൂപ മിച്ചം.
- വീണ്ടും ഓരോരുത്തരും 10 രൂപ വീതമെടുത്താൽ, 112 ൽ നിന്ന് 80 രൂപ കൂടി എടുത്തു; മിച്ചം $112 - 80 = 32$.

  * ഇനി ഓരോ രൂപ കൂടി എടുത്താൽ 8 രൂപയേ എടുത്തുള്ളൂ.

  * 2 രൂപ വീതമെടുത്താലും 16 രൂപയേ ആയുള്ളൂ.

  * 3 രൂപ വീതമെടുത്താൽ 24 രൂപ എടുത്തു കഴിഞ്ഞു.

  * 4 രൂപ വീതമെടുത്താൽ 32 രൂപയും തീരും.

മറ്റൊരു പണക്കണക്ക്

1 നൂറു രൂപാ നോട്ടും, 9 പത്തുരൂപാ നോട്ടും, 2 ഒറ്റ രൂപാ നാണയങ്ങളും, 8 പേർക്ക് വീതിക്കുന്ന കണക്ക് ഇങ്ങനെയും ആലോചിക്കാം.

നൂറു രൂപാ നോട്ടിനെ 10 പത്തുരൂപാ നോട്ടുകളാക്കിയാൽ, ആകെ 19 പത്തു രൂപാ നോട്ടുകളാകും. ഇത് 2 വീതം ഓരോരുത്തർക്കും കൊടുത്താൽ, 3 നോട്ട് ബാക്കി. ഇതെല്ലാം ഒറ്റ രൂപാ നാണയങ്ങളാക്കിയാൽ, 30 എണ്ണം; ഇത് നേരത്തെയുള്ള 2 നാണയങ്ങളുമായി ചേർത്ത് 32 എണ്ണം. ഇത് 4 എണ്ണം വീതം ഓരോരുത്തർക്കും കൊടുക്കാം.

ഈ കണക്കുകൂട്ടലുകളെല്ലാം നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ചുരുക്കി എഴുതാം:

		2	4
	നൂറ്	പത്ത്	ഒന്ന്
8	1	9	2
		19	2
		16	
		3	2
			32
			32
			0

ഇത് വീണ്ടും ചുരുക്കി ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

```
    24
 8 |192
    16
    ---
     32
     32
    ---
      0
```

ഓരോരുത്തർക്കും ആകെ കിട്ടുന്നത് $10 + 10 + 4 = 24$ രൂപ.

ഇത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

	8	
	192−	
10	80	$8 \times 10 = 80$
	112−	
10	80	$8 \times 10 = 80$
	32−	
4	32	$8 \times 4 = 32$
$192 \div 8 = 24$	0	$8 \times 24 = 192$

ഇതു ചെയ്യുമ്പോൾ $8 \times 2 = 16$ എന്നും $8 \times 20 = 160$ എന്നും ഓർത്താൽ, ക്രിയകൾ അല്പം കൂടി ചുരുക്കിയെഴുതാം:

	8	
	192−	
20	160	$8 \times 20 = 160$
	32−	
4	32	$8 \times 4 = 32$
$192 \div 8 = 24$	0	$8 \times 24 = 192$

ഈ കണക്കിൽത്തന്നെ സംഖ്യകൾ മാറ്റിനോക്കാം:

3000 രൂപ 12 പേർക്ക് ഒരേപോലെ വീതിച്ചാൽ, ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര രൂപ കിട്ടും ?

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ഓരോരുത്തരും 10 രൂപ, 20 രൂപ എന്നിങ്ങനെ എടുക്കുന്നതായി കരുതിയാൽ, മൊത്തത്തിൽ നിന്നു കുറയുന്നത് 120 രൂപ, 240 രൂപ എന്നിങ്ങനെയാണല്ലോ. ഇവയെല്ലാം മൊത്തമുള്ള 3000 രൂപയെക്കാൾ വളരെ ചെറിയ സംഖ്യകളല്ലേ ?

ഓരോരുത്തരും 100 രൂപ, 200 രൂപ എന്നിങ്ങനെ എടുക്കുന്നതായി കരുതിയാലോ ?

കുറയുന്നത്. 1200 രൂപ, 2400 രൂപ എന്നിങ്ങനെയാകും.

അപ്പോൾ ഇങ്ങനെ തുടങ്ങാം:

	12	
	3000−	
200	2400	$12 \times 200 = 2400$
	600	

ഇനി 100 രൂപ വീതം എടുക്കാനില്ലല്ലോ.

10 രൂപ, 20 രൂപ എന്നിങ്ങനെ എടുത്താൽ, നേരത്തെ പറഞ്ഞതുപോലെ, കുറയുന്നത് 120 രൂപ, 240 രൂപ എന്നിങ്ങനെയാണ്.

എത്ര രൂപ വീതം എടുത്താലാണ് 600 ആവുക ?

അപ്പോൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

	12	
	3000−	
200	2400	$12 \times 200 = 2400$
	600−	
50	600	$12 \times 50 = 600$
$3000 \div 12 = 250$	0	$12 \times 250 = 3000$

ഇവിടെ $12 \times 50 = 600$ എന്നു പെട്ടെന്നു കാണാൻ വിഷമമാണെങ്കിൽ, 600 തീരുന്നതുവരെ ഓരോ 120 വീതം കുറച്ചും ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാം.

അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടു തവണ 240 ഉം ഒരു തവണ 120 ഉം കുറയ്ക്കാം.

	12	
	3000−	
200	2400	$12 \times 200 = 2400$
	600−	
20	240	$12 \times 20 = 240$
	360−	
20	240	$12 \times 20 = 240$
	120−	
10	120	$12 \times 10 = 120$
$3000 \div 12 = 250$	0	$12 \times 250 = 3000$

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്യാമല്ലോ:

1. ഒരേ വിലയുള്ള 7 പേനയ്ക്ക് 98 രൂപ. ഒരു പേനയുടെ വില എത്രയാണ് ?
2. 168 രൂപ 8 പേർക്ക് ഒരുപോലെ വീതിച്ചാൽ ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര രൂപ കിട്ടും ?
3. സ്കൂൾ സ്റ്റോറിലേക്ക് 1825 നോട്ടുപുസ്തകങ്ങൾ വാങ്ങണം. 25 പുസ്തകം വീതമുള്ള എത്ര കെട്ടുകൾ വാങ്ങണം ?

മടങ്ങും മിച്ചവും

ഒരു ചെറിയ കണക്ക്:

20 പേന 5 എണ്ണം വീതമുള്ള എത്ര പായ്ക്കറ്റിലാക്കാം ?

എങ്ങനെയാണ് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിച്ചത് ?

ഇത് രണ്ടു തരത്തിൽ എഴുതാമെന്നു കണ്ടല്ലോ.

$$20 \div 5 = 4$$

$$5 \times 4 = 20$$

ഇനി 21 പേനയാണ് ഇങ്ങനെ 5 വീതമുള്ള പായ്ക്കറ്റുകളിൽ ആക്കുന്നതെങ്കിലോ ?

4 പായ്ക്കറ്റുകളിൽ നിറയ്ക്കാം; ഒരു പേന മിച്ചമുണ്ടാകും.

ഇക്കാര്യം കണക്കിന്റെ ഭാഷയിൽ പറയുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്,

21 നെ 5 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലം (quotient) 4, ശിഷ്ടം (remainder) 1

21 നെ 5 വീതമുള്ള എത്ര ഭാഗങ്ങളാക്കാമെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ് ഹരണഫലം. എത്ര മിച്ചമുണ്ടെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ് ശിഷ്ടം. അതിനാൽ ശിഷ്ടത്തെ മിച്ചം എന്നും പറയാം.

ഇക്കാര്യം ഗുണനരൂപത്തിലും എഴുതാം:

$$21 = (5 \times 4) + 1$$

ഇതുപോലെ,

$$22 = (5 \times 4) + 2$$

$$23 = (5 \times 4) + 3$$

$$24 = (5 \times 4) + 4$$

മറ്റു സംഖ്യകളെയും ഇതുപോലെ 5 ന്റെ മടങ്ങും മിച്ചവും ആയി എഴുതാമോ ?

20 ആയാലോ ?

$$20 = (5 \times 4) + 0$$

അതായത്, 20 നെ 5 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഹരണഫലം 4, ശിഷ്ടം 0.

5 നേക്കാൾ ചെറിയ സംഖ്യകളെ ഇങ്ങനെ എഴുതാമോ ?

ഉദാഹരണമായി 4 എടുത്താൽ,

$$4 = (5 \times 0) + 4$$

അതായത്, 4 നെ 5 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഹരണഫലം 0, ശിഷ്ടം 4 തന്നെ.

ഇങ്ങനെ ഏതു സംഖ്യയേയും 5 ന്റെ മടങ്ങും മിച്ചവുമായി എഴുതാം. ഇതിലെ മിച്ചം 0, 1, 2, 3, 4 ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും സംഖ്യ ആയിരിക്കും.

5 നു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യ ആയാലോ ?

4 എടുത്തുനോക്കാം:

$0 = (4 \times 0) + 0$	$4 = (4 \times 1) + 0$	$8 = (4 \times 2) + 0$
$1 = (4 \times 0) + 1$	$5 = (4 \times 1) + 1$	$9 = (4 \times 2) + 1$
$2 = (4 \times 0) + 2$	$6 = (4 \times 1) + 2$	$10 = (4 \times 2) + 2$
$3 = (4 \times 0) + 3$	$7 = (4 \times 1) + 3$	$11 = (4 \times 2) + 3$

ഇത് എത്ര വേണമെങ്കിലും തുടരാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി 135 എടുത്താലോ ?

	4	
	135−	
30	120	$4 \times 30 = 120$
	15−	
3	12	$4 \times 3 = 12$
മടങ്ങ് 33	3	$(4 \times 33) + 3 = 135$
	മിച്ചം	

അപ്പോൾ ഏതു സംഖ്യയേയും പൂജ്യമല്ലാത്ത മറ്റൊരു സംഖ്യയുടെ മടങ്ങും മിച്ചവുമായി എഴുതാം; മിച്ചം രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയേക്കാൾ ചെറുതായിരിക്കും.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

1. 2 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ 0 ശിഷ്ടം വരുന്ന സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്? 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന സംഖ്യകളോ?
2. ഒരു സംഖ്യയെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടമായി ഏതൊക്കെ സംഖ്യകൾ വരാം? ഒരേ ശിഷ്ടം വരുന്നവ ഓരോ സംഖ്യാക്രമങ്ങളായി എഴുതുക.
3. ചുവടെ സംഖ്യകൾ അടുക്കിയിരിക്കുന്ന രീതി നോക്കൂ:

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19

   i. ഒരേ വരിയിലെ സംഖ്യകളെ 5 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലങ്ങൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ? ശിഷ്ടങ്ങൾ തമ്മിലോ?

   ii. ഒരേ നിരയിലെ സംഖ്യകളെ 5 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലോ?

   iii. 10-ാം വരിയിലെ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

   iv. 12-ാം വരിയിലെ 4-ാം സംഖ്യ എന്താണ്?

   v. 123 എന്ന സംഖ്യ ഇതിലെ ഏതു വരിയിലെ എത്രാമത്തെ സംഖ്യയാണ്?

4. ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളെ 9 ന്റെ മടങ്ങും മിച്ചവുമായി പിരിച്ചെഴുതുക.

   (a) 11 (b) 111 (c) 1111

   i. 11111 നെ 9 ന്റെ മടങ്ങും മിച്ചവുമായി എങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതാമെന്ന് ഊഹിക്കുക. ഊഹം ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

   ii. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യാക്രമം തുടർന്ന് എഴുതുക.

5. ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളെ 8 ന്റെ മടങ്ങും മിച്ചവുമായി പിരിച്ചെഴുതുക.

   (a) 9 (b) 98 (c) 987

   i. 9876 നെ 8 ന്റെ മടങ്ങും മിച്ചവുമായി എങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതാമെന്ന് ഊഹിക്കുക. ഊഹം ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

   ii. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യാക്രമം തുടർന്ന് എഴുതുക.