6 ത്രികോണമിതി

കോണുകളും വശങ്ങളും

ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

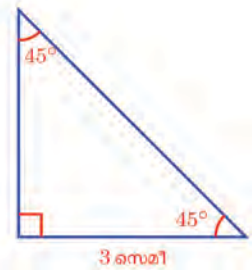
രണ്ടു കോണുകൾ 90° യും, 45° യും ആയതിനാൽ, മൂന്നാമത്തെ കോണും 45° തന്നെ.

രണ്ടു കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, അവയുടെ എതിർവശങ്ങളും തുല്യമാണ് (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

മൂന്നാമത്തെ വശമോ?

അതിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്റർ ആണെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **പുതിയ സംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **അളവുകളും സംഖ്യകളും** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഇനി ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമോ ?

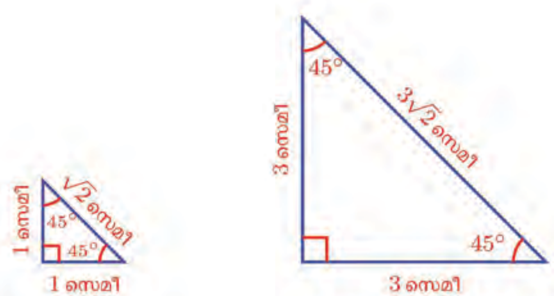


ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിനും ഈ ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളല്ലേ ?

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ് (അതായത്, ഒരേ മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആണ്) എന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **സദൃശത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഇവിടെ വലിയ ത്രികോണത്തിലെ 45° കോണിന്റെ എതിർവശം, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ അതേ കോണിന്റെ എതിർവശത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങാണ്.

അപ്പോൾ വലിയ ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളവും ഇതേപോലെ ചെറിയ ത്രികോണ ത്തിലെ വശങ്ങളുടെ മൂന്നു മടങ്ങ് തന്നെ ആകണം:



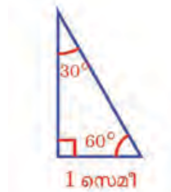
ഇതുപോലെ, കോണുകൾ 45°, 45°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം അറിയാമെങ്കിൽ, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി, ഇത്തരമൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ലംബവശം $\frac{1}{2}$ മീറ്ററാണെങ്കിൽ, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ $\frac{1}{2}$ മീറ്ററും $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ മീറ്ററും ആണ്.

ഈ കണക്ക് പൊതുവേ എങ്ങനെ പറയാം ?

കോണുകൾ 45°, 45°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിലും രണ്ടു ചെറിയ വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ്; ഈ നീളത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങാണ്, വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം

ഇനി ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:



ഇതിലെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

ഇതേപോലെയുള്ള മറ്റൊരു ത്രികോണം ചേർത്തുവച്ചാൽ ഒരു സമഭുജത്രികോണം കിട്ടുമല്ലോ.

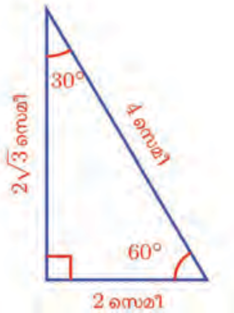
ഈ സമഭുജത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ വശം 2 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളവും 2 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെയാണ്.

ഇതിന്റെ ഉയരം $\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്റർ ആണെന്നും ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ട് (**പുതിയ സംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **അളവുകളും സംഖ്യകളും** എന്ന ഭാഗം).

അപ്പോൾ ആദ്യം വരച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം കിട്ടിയല്ലോ.

ഇനി കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ മറ്റൊരു ത്രികോണം നോക്കൂ:

ഇതിലെ 30° കോണിന്റെ എതിർവശം, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ 30° കോണിന്റെ എതിർവശത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. അപ്പോൾ മറ്റു കോണുകളുടെ എതിർവശങ്ങളും രണ്ടു മടങ്ങ് ആകണമല്ലോ.

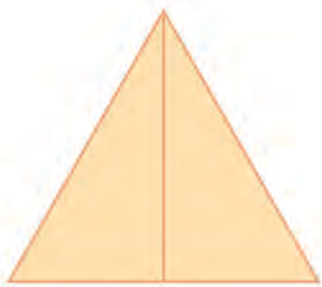


ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പൊതുവേ എങ്ങനെ പറയാം ?

കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഏറ്റവും ചെറിയവശത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങാണ് ഇടത്തരം വശം; ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ 2 മടങ്ങാണ് ഏറ്റവും വലിയ വശം

ഇത് ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഒരു കണക്കു നോക്കൂ:

ഒരു ചതുരപ്പലക വികർണ്ണത്തിലൂടെ മുറിച്ച്, ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മാറ്റിയടുക്കി, ഒരു സമഭുജത്രികോണമുണ്ടാക്കണം:

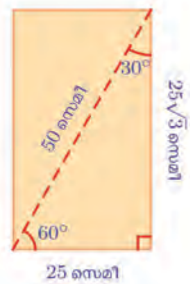


ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 50 സെന്റിമീറ്ററുമാകണം. ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം ?

ചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണമാണല്ലോ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം. അപ്പോൾ അത് 50 സെന്റിമീറ്റർ ആകണം.

ത്രികോണങ്ങൾ ചേർത്തുവയ്ക്കുമ്പോൾ കിട്ടേണ്ടത് സമഭുജത്രികോണമായതിനാൽ, ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആകണം.

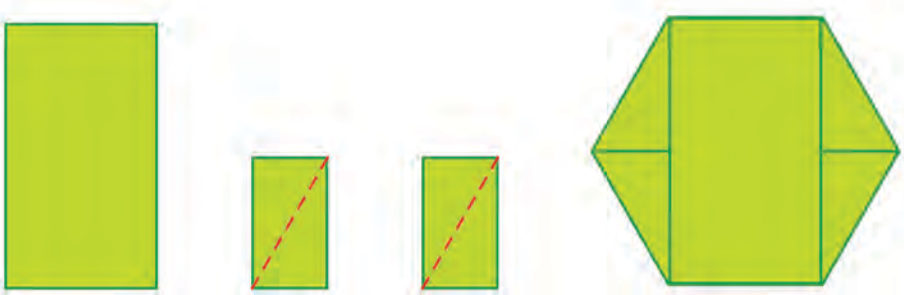
ഇത്തരമൊരു ത്രികോണത്തിൽ, ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണല്ലോ ഏറ്റവും വലിയ വശം. ഇവിടെ ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം 50 സെന്റിമീറ്റർ; അപ്പോൾ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം 25 സെന്റിമീറ്റർ; മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളമോ ?



ഇപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കിട്ടിയില്ലേ ?

ഇതുപോലെ ഈ കണക്ക് ചെയ്തുനോക്കൂ:

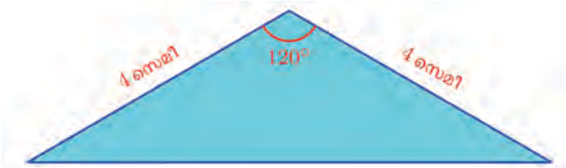
രണ്ടു ചതുരങ്ങൾ വികർണ്ണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, മറ്റൊരു ചതുരത്തോടു ചേർത്തുവച്ച്, ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു സമഷഡ്ഭുജമുണ്ടാക്കണം:



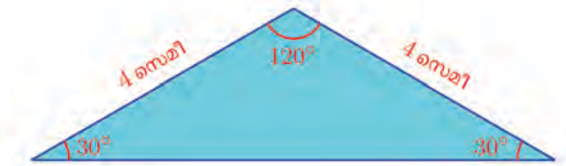
ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 30 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമെങ്കിൽ, ചതുരങ്ങളുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം ?

ചില പരപ്പളവുകൾ കണക്കാക്കാനും ഇക്കാര്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

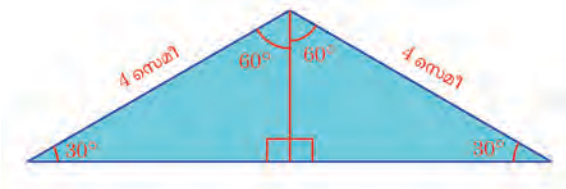
ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



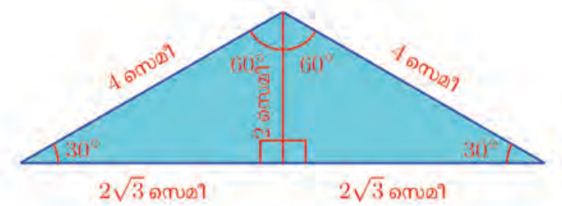
ഈ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമായതിനാൽ, അവയ്ക്കെതിരെയുള്ള കോണുകളും ഒന്നുതന്നെയാണ്. മുകളിലെ കോൺ 120° ആയതിനാൽ, മറ്റു രണ്ടു കോണുകളുടെ തുക 60°; അവ തുല്യമായതിനാൽ ഓരോന്നും 30°.



മുകളിലെ മൂലയിൽനിന്ന് താഴത്തെ വശത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബം മുകളിലെ കോണിനെ തുല്യമായി മുറിക്കുമല്ലോ (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമപാർശ്വ ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).



ഇനി ഈ ലംബത്തിന്റെ നീളവും ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കാമല്ലോ.



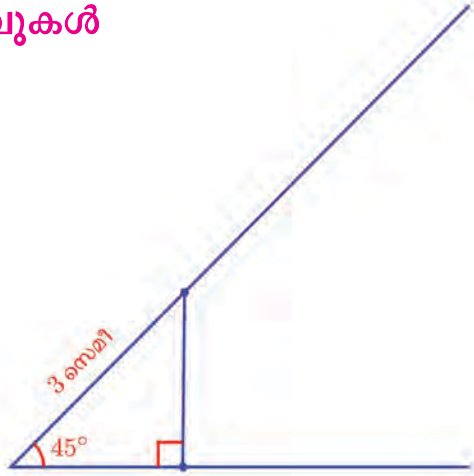
അപ്പോൾ ത്രികോണപ്പരപ്പ് $2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

(1) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സാമാന്തരികങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(2) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കാണുക.

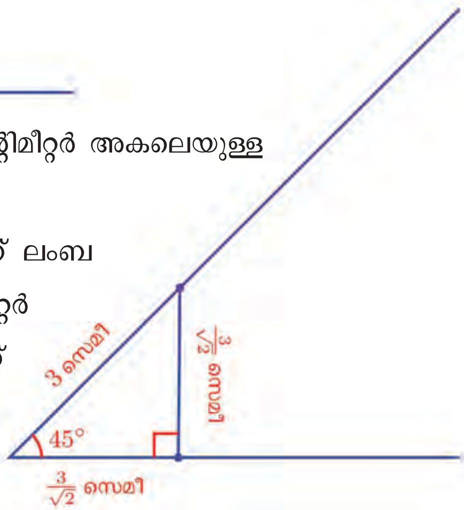
പുതിയ കോണളവുകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

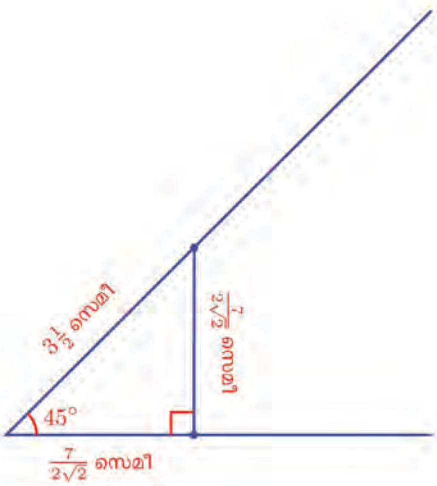


45° കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിൽ, മൂലയിൽ നിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിൽനിന്ന്, മറ്റേ വശത്തേക്ക് ലംബം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

ഈ ലംബത്തിന്റെ ഉയരവും, കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേക്കുള്ള അകലവും $\frac{3}{\sqrt{2}}$ സെന്റിമീറ്റർ ആണെന്ന് കഴിഞ്ഞ ഭാഗത്തിലെ കണക്കുകളിൽ നിന്ന് കാണാമല്ലോ.

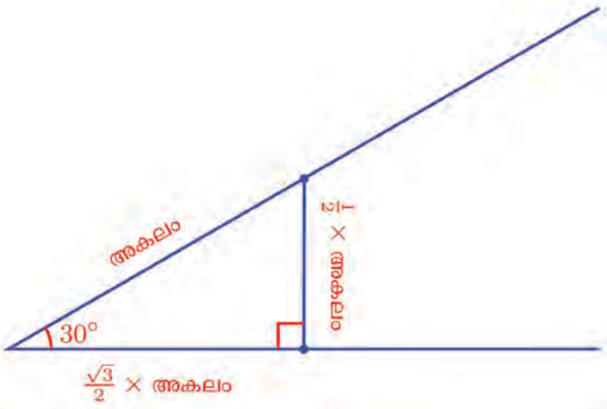


ആദ്യം എടുത്ത ബിന്ദു, കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്ന് $3\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ അകലെയാണെങ്കിലോ ?

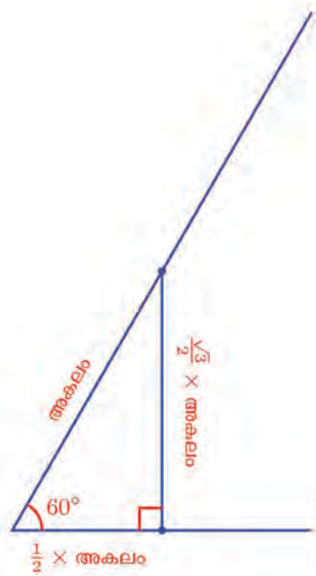


പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ ആദ്യത്തെ ബിന്ദു കോണിന്റെ ഒരു വശത്ത് ഏത് അകലത്തിൽ എടുത്താലും, മറ്റേ വശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ ഉയരവും, മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേക്കുള്ള അകലവും, ആദ്യമെടുത്ത അകലത്തിന്റെ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ഭാഗം തന്നെ ആയിരിക്കും.

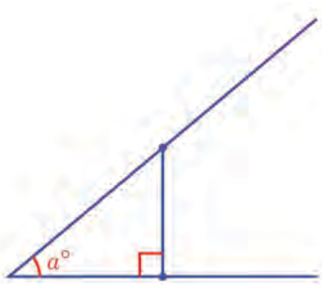
45° കോണിനു പകരം, 30° കോൺ ആയാലോ ?

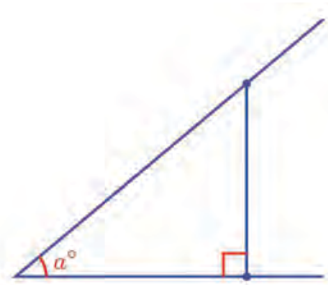


60° കോൺ ആയാലോ ?



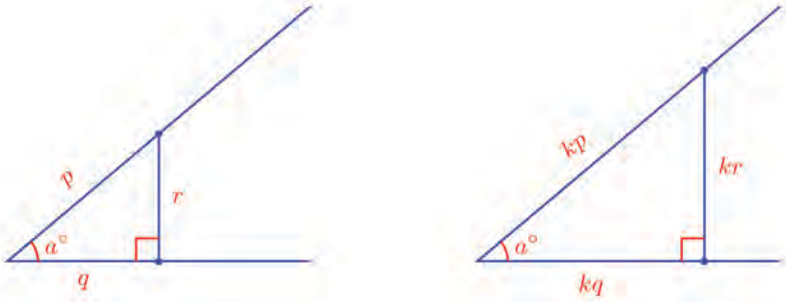
മറ്റു കോണുകൾ എടുത്താലും, ഇതുപോലെ ലംബത്തിന്റെ ഉയരവും, മൂലയിൽനിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലവും, ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ നിശ്ചിത ഭാഗം തന്നെ ആയിരിക്കുമോ ? ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:





ഒരു കോണിന്റെ ഒരു വശത്ത്, മൂലയിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്ത അകലങ്ങളിൽ, രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത്, അവയിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്ക് ലംബങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.

ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകളെല്ലാം തുല്യമായതിനാൽ, വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ്. അപ്പോൾ ഇടത്തെ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ നീളം വലുപ്പക്രമത്തിൽ p, q, r എന്നെടുത്താൽ, വലത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ഇതേ ക്രമത്തിൽ, p, q, r ഇവയെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്. ഈ സംഖ്യ k എന്നെടുത്താൽ, വലത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം kp, kq, kr:



ഇടത്തെ ത്രികോണത്തിൽ ലംബത്തിന്റെ ഉയരം, മൂലയിൽനിന്ന് ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ $\frac{r}{p}$ ഭാഗവും, മൂലയിൽനിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേക്കുള്ള അകലം, ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ $\frac{q}{p}$ ഭാഗവും ആണല്ലോ.

വലത്തെ ത്രികോണത്തിലോ ?

ഈ ഭാഗങ്ങൾ $\frac{kr}{kp} = \frac{r}{p}$ യും $\frac{kq}{kp} = \frac{q}{p}$ യും

അതായത്, ഈ ഭാഗങ്ങൾ മാറുന്നില്ല.

അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

> ഒരു കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിൽ, മൂലയിൽ നിന്ന് പല അകലത്തിൽ ബിന്ദുക്കൾ എടുത്താൽ, ആ ബിന്ദുക്കളിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങളുടെ ഉയരവും, മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബങ്ങളുടെ ചുവടുകളിലേയ്ക്കുള്ള അകലവും മാറും; പക്ഷേ ഇവ ഓരോന്നും ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് എന്നത് മാറുന്നില്ല.

$45°$, $60°$, $30°$ എന്നീ കോണുകളിൽ ഈ ഭാഗങ്ങൾ കണക്കാക്കിയല്ലോ; മറ്റു കോണുകളിൽ ഇവ കണക്കാക്കുന്നത് അത്ര എളുപ്പമല്ല. എന്നാൽ വളരെക്കാലം മുമ്പുതന്നെ ഗണിതകാരന്മാർ $90°$ യേക്കാൾ കുറവായ എല്ലാ കോണുകളിലും ഈ ഭാഗങ്ങൾ കണക്കാക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുകയും, അങ്ങനെ കണക്കാക്കിയ സംഖ്യകൾ പട്ടികയാക്കുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

ഉദാഹരണമായി, $40°$ കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ ഉയരം, മൂലയിൽ നിന്ന് ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ ഏകദേശം 0.6428 ഭാഗമാണ് എന്നും, മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലം, ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ 0.7660 ഭാഗമാണ് എന്നും ഈ പട്ടികകളിൽ നിന്നു കാണാം.

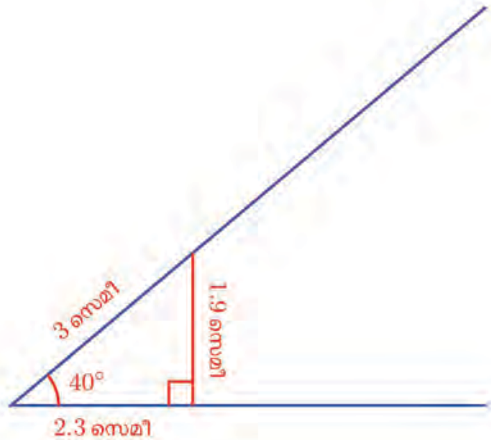
അപ്പോൾ 40° കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിൽ, മൂലയിൽ നിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ ഒരു ബിന്ദുവെടുത്ത്, മറ്റെ വശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരച്ചാൽ, ഈ ലംബത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം

$$3 \times 0.6428 \approx 1.9 \text{ സെമീ}$$

എന്നും, മൂലയിൽനിന്ന് ഈ ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേക്കുള്ള അകലം ഏകദേശം

$$3 \times 0.7660 \approx 2.3 \text{ സെമീ}$$

എന്നും കാണക്കാക്കാം.



ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം 3 മീറ്ററാണെങ്കിൽ, ലംബത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം 1 മീറ്റർ, 928 മില്ലി മീറ്റർ എന്നും, മൂലയിൽനിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലം ഏകദേശം 2 മീറ്റർ, 298 മില്ലി മീറ്റർ എന്നും കണക്കാക്കാം.

ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കുന്ന സംഖ്യകൾക്ക് പ്രത്യേക പേരുകളുമുണ്ട്. ഇപ്പോൾ കണ്ട കണക്കിൽ, 0.6428... എന്ന സംഖ്യ, 40° കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ ഉയരം, മൂലയിൽ നിന്ന് ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയാണല്ലോ. ഇതിനെ **40° കോണിന്റെ സൈൻ (Sine of 40°)** എന്നാണ് പറയുന്നത്; ചുരുക്കി sin 40° എന്നെഴുതും. അതായത്

$$\sin 40° \approx 0.6428$$

രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയായ 0.7660... എന്നത്, 40° കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേക്കുള്ള അകലം, ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ്. ഇതിനെ **40° യുടെ കോസൈൻ (Cosine of 40°)** എന്നു പറയുകയും, cos 40° എന്നു ചുരുക്കിയെഴുതുകയും ചെയ്യും. അതായത്

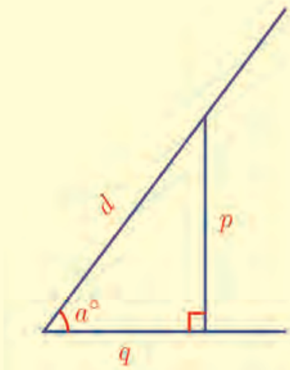
$$\cos 40° \approx 0.7660$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ,

$a°$ കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിൽ, കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്ന് d അകലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ ഉയരം p യും, കോണിന്റെ മൂലയിൽനിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലം q യും ആണെങ്കിൽ,

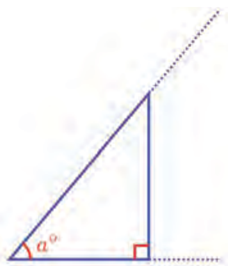
$$\sin a° = \frac{p}{d}$$

$$\cos a° = \frac{q}{d}$$



ഇതിൽ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ട കാര്യം, കോണിന്റെ ഒരു വശത്ത് പല ബിന്ദുക്കളെടുക്കുമ്പോൾ $d, p. q$ എന്നീ സംഖ്യകളെല്ലാം മാറും; പക്ഷേ $\sin a°$, $\cos a°$ എന്നീ സംഖ്യകൾ മാറില്ല. കോണിന്റെ വലുപ്പമായ $a°$ മാറിയാൽ മാത്രമേ ഇവ മാറുകയുള്ളൂ. അതായത്, ഇവ കോണിന്റെ വലുപ്പത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളാണ്.

sin, cos ഇവയെ അല്പം വ്യത്യസ്തമായ മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം. ആ കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുമ്പോൾ ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടുമല്ലോ.



കോണിന്റെ മൂലയും, ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയാണ് ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം. ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബം, ത്രികോണത്തിൽ $a°$ കോണിന്റെ **എതിർവശമാണ് (Opposite side);** കോണിന്റെ മൂലയും ലംബത്തിന്റെ ചുവടും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ, ത്രികോണത്തിൽ $a°$ കോണിന്റെ **സമീപവശം (Adjacent side)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ $\sin a°$, $\cos a°$ ഇവയെ ഇങ്ങനെ പറയാം:

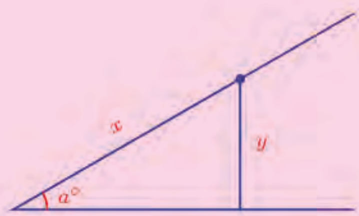
ഒരു കോൺ $a°$ ആയ മട്ടത്രികോണത്തിൽ,

$$\sin a° = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$$

$$\cos a° = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$$

അനുപാതം

ഒരു കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലെ ബിന്ദുക്കളെല്ലാമെടുത്താൽ മറ്റേ വശത്തിൽ നിന്നുള്ള ഉയരം മാറുന്നത് കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്നുള്ള അകലം മാറുന്നതിനനുസരിച്ചാണെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ.



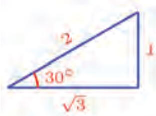
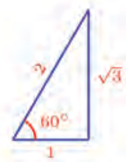
(**അനുപാതം** എന്ന പാഠത്തിലെ **ആനുപാതിക മാറ്റം** എന്ന ഭാഗം).

ഈ മാറ്റത്തിലെ ആനുപാതികസ്ഥിരം എന്താണ് ? $\frac{y}{x}$ നെയാണല്ലോ, $\sin a°$ എന്നു പറയുന്നത്.

അതായത്, അകലം മാറുന്നതനുസരിച്ച് ഉയരം മാറുന്നതിലെ ആനുപാതികസ്ഥിരമാണ് $\sin a°$

ഇതുപോലെ $\cos a°$ യേയും മറ്റൊരു മാറ്റത്തിന്റെ ആനുപാതികസ്ഥിരമായി പറയാമോ ?

ആദ്യത്തെ ഭാഗത്ത്, ഒരു കോൺ 45°, 60°, 30° എന്നിങ്ങനെയായ മട്ടത്രികോണങ്ങളെക്കുറിച്ചു കണ്ട കാര്യങ്ങൾ sin, cos ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

കോൺ	ചിത്രം	സൈൻ	കോസൈൻ
30°		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60°		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

(1° മുതൽ 89° വരെ 1° ഇടവിട്ടുള്ള കോണുകളുടെയെല്ലാം സൈനും കോസൈനും നാലു ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി പാഠത്തിന്റെ അവസാനമുള്ള പട്ടികയിലുണ്ട്).

ആദ്യഭാഗത്ത് ചെയ്തപോലെ, പരപ്പളവുകൾ കണക്കാക്കാൻ സൈൻ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാം:

ജിയോജിബ്രയിൽ, നീളം 1 ആയി AB എന്ന വര വരയ്ക്കുക. ഒരു Angle സ്ലൈഡർ a ഉണ്ടാക്കുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B, A ഇവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി a എന്ന് കൊടുക്കുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു B' കിട്ടും. AB' യോജിപ്പിക്കുക. B യിലൂടെ AB' ന് ലംബം വരച്ച് അത് AB' മായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണം ABC വരച്ചതിനു ശേഷം AB' മറച്ചുവയ്ക്കാം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. കോണളവ് മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നത് കാണാമല്ലോ. ഇതിൽ BC യുടെ നീളം കോണളവിന്റെ sin അളവും AC യുടെ നീളം cos അളവുമാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?). ഇതുപയോഗിച്ച് sine, cosine അളവുകളുടെ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കുക. sine, cosine സംഖ്യകൾ പരമാവധി എത്രവരെയാകാം?

അതിന് മുകളിലെ മൂലയിൽനിന്നു ലംബം വരയ്ക്കാം:

കോണുകളുടെ സൈൻ, കോസൈൻ എന്നിവ കാണാൻ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിക്കാം. Input Bar ൽ sin (30°) എന്നു കൊടുത്താൽ sin 30° കിട്ടും. ഇതുപോലെ കോസൈൻ സംഖ്യകളും കാണാം. (30° എന്നത് ലഭിക്കാൻ 30 എന്നു ടൈപ്പു ചെയ്ത ശേഷം Input Bar ന്റെ വലത്തെ അറ്റത്തുള്ള α ചിഹ്നത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് ° എന്നതിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി).

ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, താഴത്തെ വശത്തിന്റെയും ഈ ലംബത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ.

ലംബത്തിന്റെ ഉയരം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

ചിത്രത്തിൽ ഇടതുവശത്തുള്ള മട്ടത്രികോണത്തിൽ, 50° കോണിന്റെ എതിർവശമാണല്ലോ ഈ ലംബം; എതിർവശത്തിന്റെ നീളത്തെ കർണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് sin 50°; അപ്പോൾ ലംബത്തിന്റെ ഉയരം,

കർണ്ണത്തിനെ sin 50° കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്.

അതായത് $4 \times \sin 50°$

ഇനി പട്ടികയിൽ നിന്ന്

$$\sin 50° \approx 0.7660$$

എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ

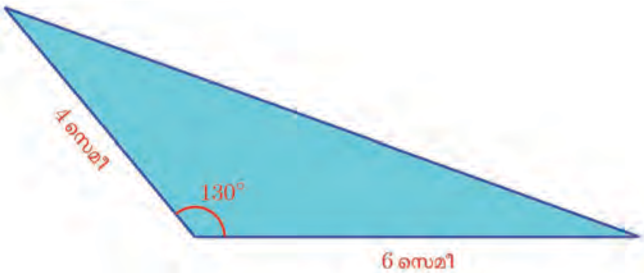
$$\text{ഉയരം} \approx 4 \times 0.7660 = 3.064$$

ഇനി പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ

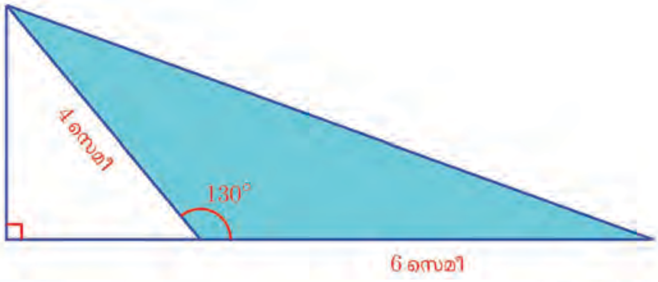
$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3.064 \approx 9.19$$

അതായത്, പരപ്പളവ് ഏകദേശം 9.19 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഈ കണക്കിൽ, ത്രികോണത്തിലെ കോൺ 50° ക്കു പകരം 130° ആക്കിയാലോ ?



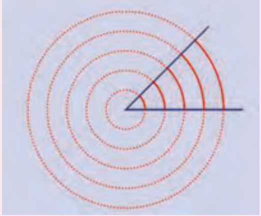
ഇതിൽ മുകളിലെ മൂലയിൽ നിന്നുള്ള ലംബം, ത്രികോണത്തിനു പുറത്താണ്.



ഡിഗ്രി അളവ്

ഒരു കോണിന്റെ അളവ് 45° എന്നാൽ എന്താണർഥം?

ഈ അളവുള്ള ഒരു കോണിന്റെ ശീർഷം കേന്ദ്രമായി പലപല വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം; അവയിലെല്ലാം ഈ കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുന്ന ചാപങ്ങളുടെ നീളവും പലതാണ്;



പക്ഷേ ഈ ചാപങ്ങളോരോന്നും അതതു വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണെന്നതിൽ മാറ്റമില്ല. ഈ $\frac{1}{8}$ നെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് 45.

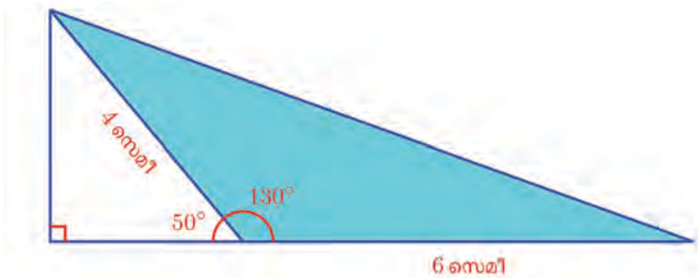
കോണിന്റെ അളവ് 60° ആയാലോ?

ശീർഷം കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന ഏതു വൃത്തത്തിന്റെയും $\frac{1}{6}$ ഭാഗമാണ് കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുക. അതിനെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാണ് 60.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഏതു കോണിന്റെയും ഡിഗ്രി അളവ് എന്നത് അതിന്റെ ശീർഷം കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിൽ, കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുന്ന ചാപത്തിന്റെ നീളത്തെ മൊത്തം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവുകൊണ്ടു ഹരിച്ച്, 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണ്.

ഈ ലംബത്തിന്റെ ഉയരം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

നമ്മുടെ ത്രികോണത്തിനു പുറത്തുള്ള മട്ടത്രികോണത്തിലെ ഒരു കോൺ 50° ആണല്ലോ; അതിന്റെ എതിർവശമാണ് നമുക്കു വേണ്ട ലംബം.



അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ, ലംബത്തിന്റെ ഉയരം $4 \sin 50° \approx 4 \times 0.766 = 3.064$ സെന്റിമീറ്റർ തന്നെയാണ്. പരപ്പളവും ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3.064 \approx 9.19 \text{ ചസെമീ}$$

(1) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററും 10 സെന്റിമീറ്ററും; അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ 40°.

(i) ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(ii) ഇതേ വശങ്ങളും, അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ 140° യും ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

(2) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, അതിലെ ഒരു കോൺ 100° യുമാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററും, 12 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്; അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ 50° യും. അതിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(4) ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്ററും, അതിൽ ഒരു കോൺ 40° യും ആയി ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കണം. ഈ 40° കോണിനെതിരെയുള്ള വശത്തിന്റെ നീളം ചുരുങ്ങിയത് എത്ര സെന്റിമീറ്റർ ആകണം ?

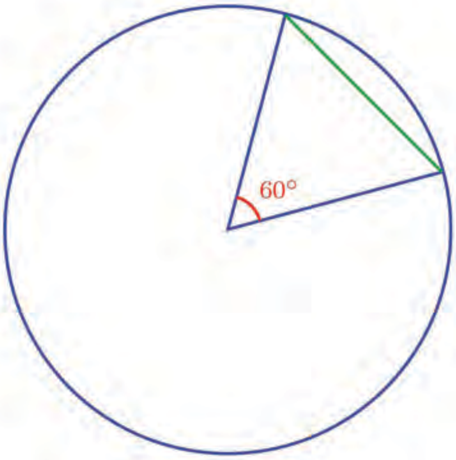
(5) വശം 5 സെന്റിമീറ്ററും ഒരു കോൺ 70° യും ആയ സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

ത്രികോണവും വൃത്തവും

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളം, കേന്ദ്രകോൺ ഉപയോഗിച്ചു കണക്കാക്കാം എന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ (ഒൻപതാം ക്ലാസിലെ **വൃത്തഭാഗങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **നീളവും കോണും** എന്ന ഭാഗം).

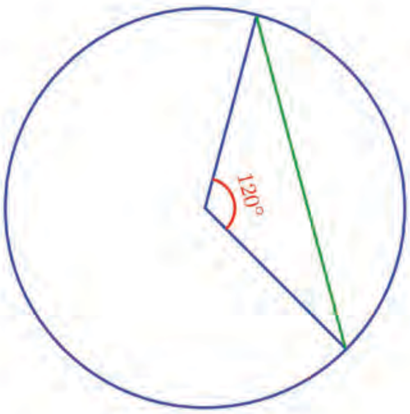
വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ നീളം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

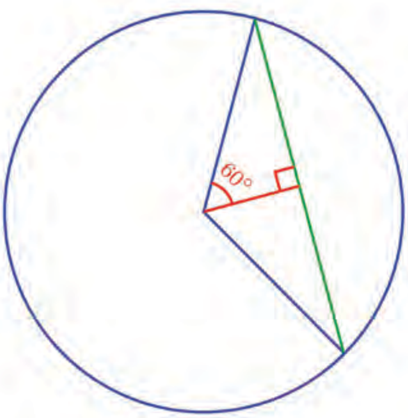
ഉദാഹരണമായി, കേന്ദ്രകോൺ $60°$ ആയ ഞാണിന്റെ നീളം, വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിനു തുല്യ മാണെന്ന് എളുപ്പം കാണാം (എങ്ങനെ ?).



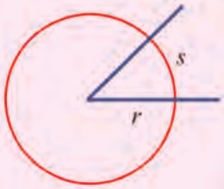
കേന്ദ്രകോൺ $120°$ ആയ ഞാണിന്റെ നീളമോ ?

ഇതു കണക്കാക്കാൻ, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഞാണിലേക്കുള്ള ലംബം വരയ്ക്കാം. ഇത് ഞാണിനെയും കേന്ദ്രകോണിനെയും സമഭാഗം ചെയ്യുമല്ലോ (കാരണം ?).





കോണിനു മറ്റൊരളവ്



ഒരു കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവെന്താൽ എന്താണെന്നു കണ്ടല്ലോ: ഒരു കോണിന്റെ മൂല കേന്ദ്രമാക്കി പല വലുപ്പത്തിലുള്ള വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചാൽ അവയുടെ ചുറ്റളവും കോണിനുള്ളിലെ ചാപത്തിന്റെ നീളവും മാറുമെങ്കിലും വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ചാപമെന്നത് മാറുന്നില്ല. അതായത്, ചിത്രത്തിലെ s ഉം r ഉം മാറുമെങ്കിലും, $\frac{s}{2\pi r}$ മാറുന്നില്ലെന്നും, അതിനെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് ഡിഗ്രി അളവെന്നും പറഞ്ഞു. അതായത്, കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവ് $= \frac{s}{2\pi r} \times 360$. ഇതിലെ s, r ഇവ മാറിയാലും 2π, 360 എന്നീ സംഖ്യകൾ മാറുന്നില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ കോണളക്കാൻ $\frac{s}{r}$ എടുത്താൽപ്പോരേ ?

ഈ അളവിനെയാണ് കോണിന്റെ **റേഡിയൻ (Radian)** അളവ് എന്നു പറയുന്നത്. അതായത്, മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ,

കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് $= \frac{s}{r}$.

ഡിഗ്രി അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ $°$ എന്ന ചിഹ്നമാണല്ലോ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. റേഡിയൻ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ **rad** എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

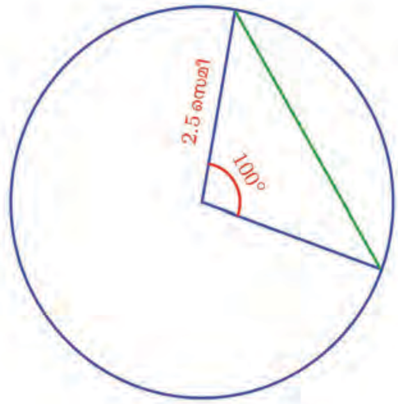
ഈ ആശയം ആദ്യമായി അവതരിപ്പിച്ചത് പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന റോജർ കോട്സ് (Roger Cotes) എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനാണ്. റേഡിയൻ എന്ന പേരു കൊടുത്തത്, പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിലെ ജെയിംസ് തോംസൺ (James Thomson) എന്ന ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞനും.

ആരവും ഞാണിന്റെ പകുതിയും ലംബവും ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം, വൃത്തത്തിന്റെ ആരം; 60° കോണിന്റെ എതിർവശം, ഞാണിന്റെ പകുതി.

അപ്പോൾ ഞാണിന്റെ പകുതി, ആരത്തിന്റെ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ഭാഗം എന്നു കാണാമല്ലോ.

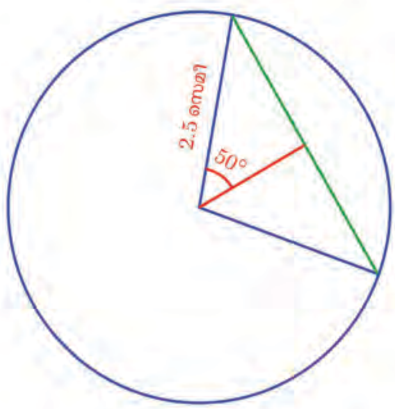
ഞാണിന്റെ നീളം, ആരത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങ്.

കേന്ദ്രകോൺ ഇരട്ടിക്കുമ്പോൾ ചാപവും ഇരട്ടിക്കും എന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. പക്ഷേ, ഞാൺ ഇരട്ടിക്കുന്നില്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. അതായത്, കേന്ദ്രകോൺ മാറുന്നതിന്റെ തോതിലല്ല, ഞാണിന്റെ നീളം മാറുന്നത്.



ഇനി ഈ ചിത്രത്തിലെ ഞാണിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് ഞാണിലേക്കു ലംബം വരച്ച്, കേന്ദ്രകോണിനെയും ഞാണിനെയും പകുതിയാക്കാം;



ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ 50° കോണിന്റെ എതിർവശം $2.5 \times \sin 50°$ സെന്റിമീറ്റർ

ഇത് ഞാണിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഞാണിന്റെ നീളം

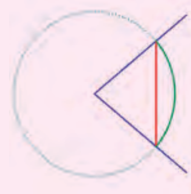
$$5 \times \sin 50° \approx 5 \times 0.7660 \approx 3.8 \text{ സെമീ}$$

ഏതു ഞാണിന്റെയും നീളം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

ഞാണിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാൻ എന്തെല്ലാമാണു ചെയ്തത് ?

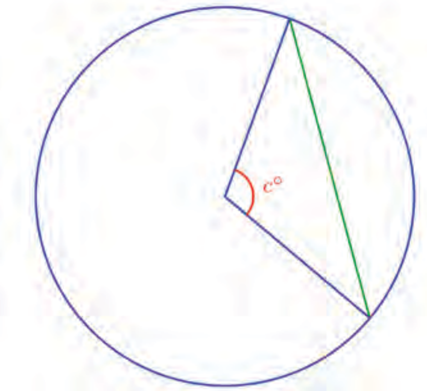
നേർവഴി

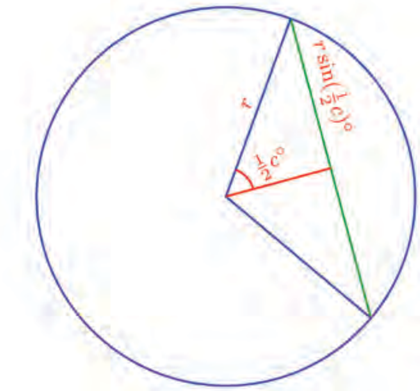
ഡിഗ്രി അളവായാലും, റേഡിയൻ അളവായാലും, കോണിന്റെ വലുപ്പം സൂചിപ്പിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നത് ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളത്തെയാണല്ലോ. അതിനുപകരം ഞാണിന്റെ നീളം ഉപയോഗിച്ചുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകളാണ്, ബി.സി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഗ്രീസിലെ ഹിപ്പാർക്കസ് (Hipparchus) എന്ന വാനശാസ്ത്രജ്ഞൻ നടത്തിയത്.



വ്യത്യസ്ത കേന്ദ്രകോണുകളുള്ള ഞാണുകളുടെ നീളങ്ങൾ കാണിക്കുന്ന ഒരു വലിയ പട്ടിക ഇദ്ദേഹം എഴുതിയിട്ടുള്ളതായി പിൽക്കാലത്തെ പല ഗണിതകാരന്മാരും പറയുന്നുണ്ടെങ്കിലും, അതു കണ്ടു കിട്ടിയിട്ടില്ല. ഏ.ഡി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഈജിപ്റ്റിലെ ക്ലോഡിയസ് ടോളമി (Caludius Ptolemy) ഇത്തരത്തിൽ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയത് കിട്ടിയിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽ, ആരം 60 ആയ ഒരു വൃത്തത്തിൽ $\frac{1}{2}°$ ഇടവിട്ട്, 180° വരെയുള്ള കേന്ദ്രകോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാണുകളുടെ നീളം വളരെ കൃത്യമായി അദ്ദേഹം കണക്കുകൂട്ടിയിട്ടുണ്ട്.

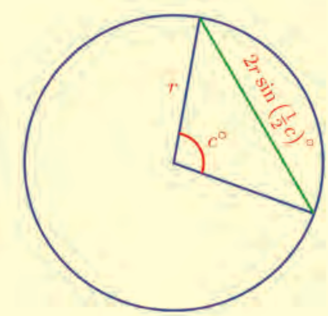
കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയുടെ സൈനിനെ ആരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചപ്പോൾ, ഞാണിന്റെ പകുതി കിട്ടി. അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങെടുത്തപ്പോൾ മുഴുവൻ ഞാണും കിട്ടി.





അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം?

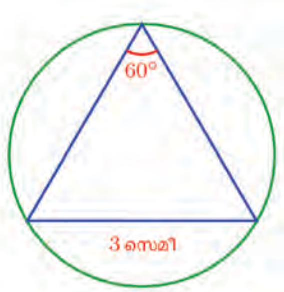
ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണിന്റെയും നീളം, കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയുടെ സൈനിനെ ആരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്



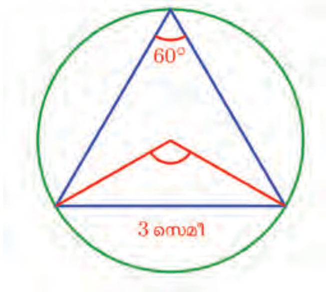
ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കു നോക്കുക:

വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

ചിത്രം നോക്കൂ:



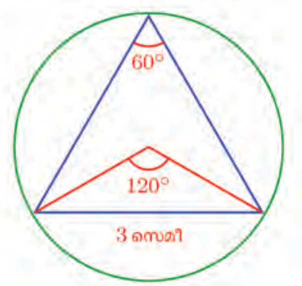
ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതു വശവും, പരിവൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണാണ്; അതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എന്താണ്?



ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ രണ്ടു മൂലകൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ തന്നെയാണല്ലോ, താഴത്തെ വശമായ ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ.

വൃത്തത്തിലെ ഈ ചാപത്തിൽ അല്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവാണ് ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂല.

അപ്പോൾ **വൃത്തങ്ങളും കോണുകളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **ചാപവും കോണും** എന്ന ഭാഗത്തിലെ തത്വമനുസരിച്ച്, ചാപത്തിന്റെ (ഞാണിന്റെയും) കേന്ദ്രകോൺ, $60° \times 2 = 120°$



മുകളിൽ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, ഈ വശത്തിന്റെ നീളം, പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തെ $2 \sin 60°$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ്.

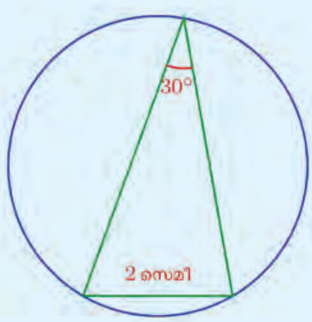
$$2 \sin 60^{\circ} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

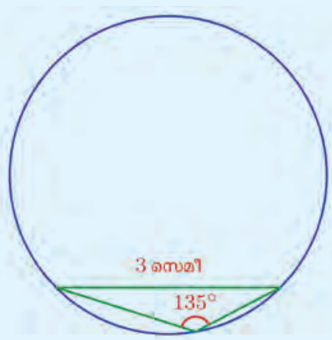
അപ്പോൾ ആരം ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$3 \div \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരം $\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്റർ.

(1) രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും അവയുടെ പരിവൃത്തങ്ങളുമാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:

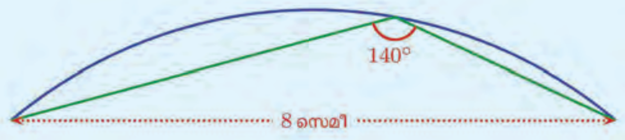




ഓരോ വൃത്തത്തിന്റെയും ആരം കണക്കാക്കുക.

(2) 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയുടെ അറ്റങ്ങളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കണം; വരയുടെ ഒരു വശത്തുള്ള വൃത്തഭാഗത്തിലെ കോൺ 80° ആയിരിക്കുകയും വേണം. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയായെടുക്കണം ?

(3) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



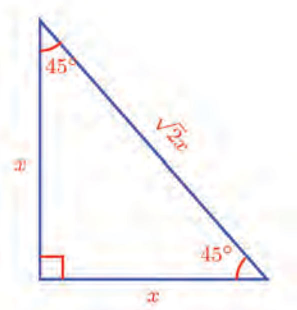
വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ് ?

വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഒന്നുതന്നെയാണെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ (**അനുപാതം** എന്ന പാഠത്തിലെ **തോതും അനുപാതവും** എന്ന ഭാഗം). മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ, വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം നിശ്ചയിക്കും.

ഉദാഹരണമായി, കോണുകൾ 45°, 45°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിലും രണ്ടു ചെറിയ വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണെന്നും, ഈ നീളത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങാണ് വലിയ വശത്തിന്റെ നീളമെന്നും ഈ പാഠത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ കണ്ടല്ലോ.

അതായത് ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം 1, 1, $\sqrt{2}$ എന്നീ സംഖ്യകളെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്.

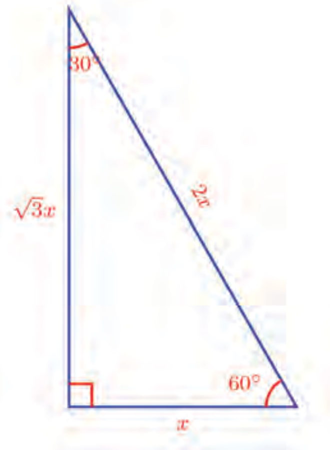


മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ,

> കോണുകൾ 45°, 45°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $1 : 1 : \sqrt{2}$ ആണ്.

ഇതുപോലെ കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങാണ് ഇടത്തരം വശം എന്നും, ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ 2 മടങ്ങാണ് ഏറ്റവും വലിയ വശം എന്നും കണ്ടല്ലോ.

അതായത് ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം 1, $\sqrt{3}$, 2 എന്നീ സംഖ്യകളെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്.

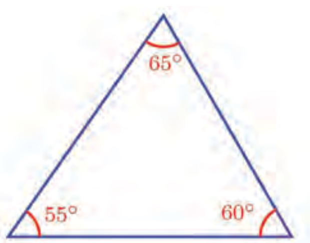


ഇതും വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധമായി പറയാം:

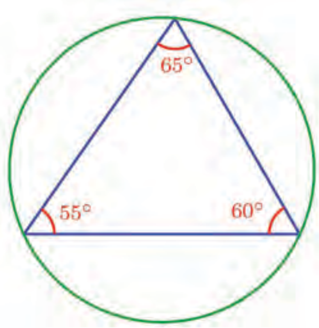
> കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : $\sqrt{3}$: 2 ആണ്.

മറ്റു ത്രികോണങ്ങളിൽ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണക്കാക്കാൻ കോണുകളുടെ സൈൻ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:



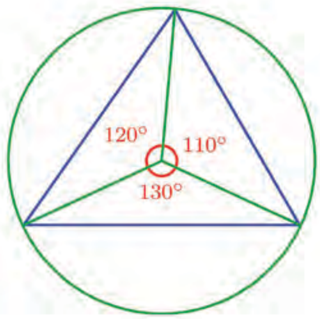
ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തം വരച്ചാൽ, വശങ്ങളെല്ലാം വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകളാകുമല്ലോ.



ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 1 : $\sqrt{3}$: 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിലായാൽ അതിന്റെ കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയിരിക്കുമോ ? ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിച്ച് നോക്കാം.

ആദ്യം വശങ്ങൾ 1 : $\sqrt{3}$: 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം. ഇതിനായി Min = 0 വരത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a ഉണ്ടാക്കുക. Segment with Given Length ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ബിന്ദുവിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ വരയുടെ നീളം a*sqrt(3) എന്ന് നൽകുക ($a\sqrt{3}$ എന്നാണിതിനർഥം). ഈ വരയുടെ ഒരറ്റം കേന്ദ്രമായി ആരം a ആയ ഒരു വൃത്തവും മറ്റേ അറ്റം കേന്ദ്രമായി ആരം 2a ആയ മറ്റൊരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും വരയുടെ അറ്റങ്ങളും മൂലകളായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ. a മാറ്റി നോക്കൂ. കോണുകൾക്ക് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു. ഇതേ രീതിയിൽ, വശങ്ങൾ $2 : \sqrt{5}+1 : \sqrt{5}+1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വരത്തക്കവിധം ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് കോണുകൾ അളന്ന് നോക്കൂ.

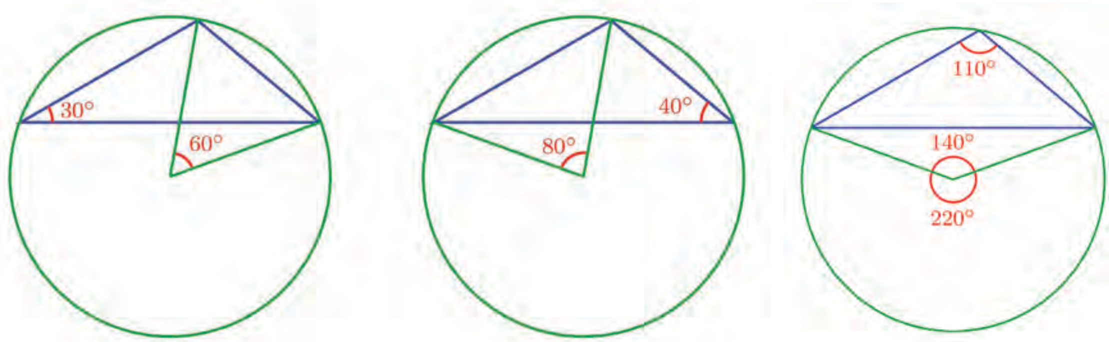
ഓരോ ഞാണിന്റെയും കേന്ദ്രകോൺ, ത്രികോണത്തിൽ അതിനെതിരെയുള്ള കോണിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങുമാണ് (**വൃത്തങ്ങളും കോണുകളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **ചാപവും കോണും** എന്ന ഭാഗം).



അപ്പോൾ, പരിവൃത്ത ആരം r എന്നെടുത്താൽ, ഞാണുകളുടെ നീളം $2r \sin 55°$, $2r \sin 60°$, $2r \sin 65°$; ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $\sin 55° : \sin 60° : \sin 65°$. പട്ടികയിൽ നിന്ന് ഇവ കണ്ടുപിടിക്കുകയുമാകാം. ഇതിൽ 55°, 60°, 65° എന്നത് ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ തന്നെയാണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ത്രികോണം ഇങ്ങനെയായാലോ ?

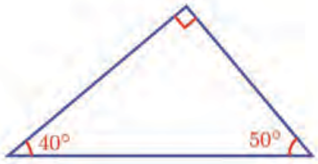
പരിവൃത്തവും, ഞാണുകളായ വശങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണുകളും ഇങ്ങനെയാകും:



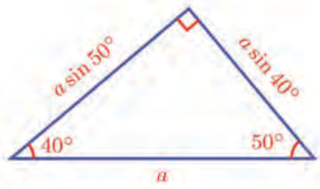
അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ പരിവൃത്തആരം r എന്നെടുത്താൽ, ഞാണുകളുടെ, അഥവാ ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം $2r \sin 30°$, $2r \sin 40°$, $2r \sin 70°$ എന്നിങ്ങനെയാകും; അംശബന്ധം $\sin 30°: \sin 40°: \sin 70°$

ഇതിൽ 30°, 40° എന്നിവ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു കോണുകളും, 70° എന്നത്, 180° ൽ നിന്ന് മൂന്നാമത്തെ കോണായ 110° കുറച്ചതും ആണെന്നു ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഇനി മട്ടത്രികോണമായാലോ ?

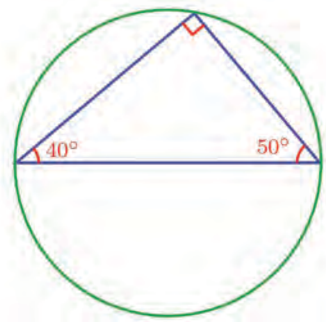


ഇതിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം a എന്നെടുത്താൽ, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമല്ലോ



പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും a തന്നെ എന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

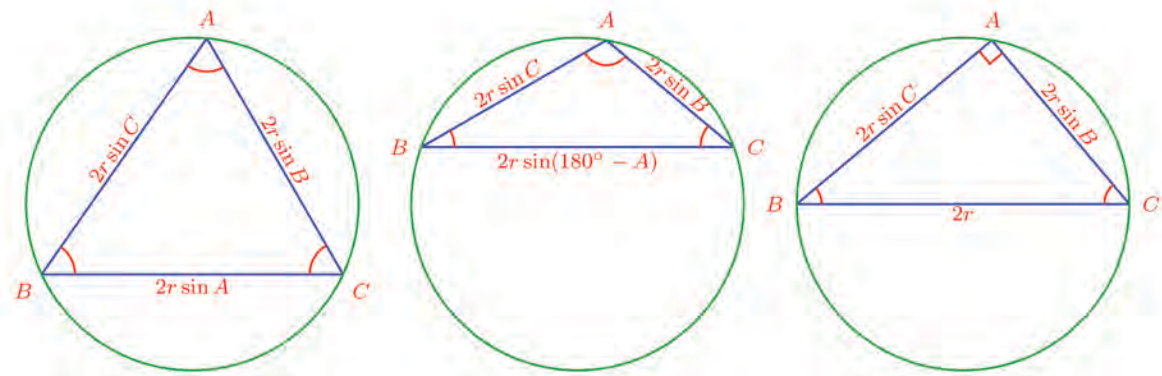
(ഒൻപതാം ക്ലാസിലെ **സമാന്തരവരകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണ കേന്ദ്രങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ അവസാനമുള്ള കണക്കുകളിൽ 1(iii)).



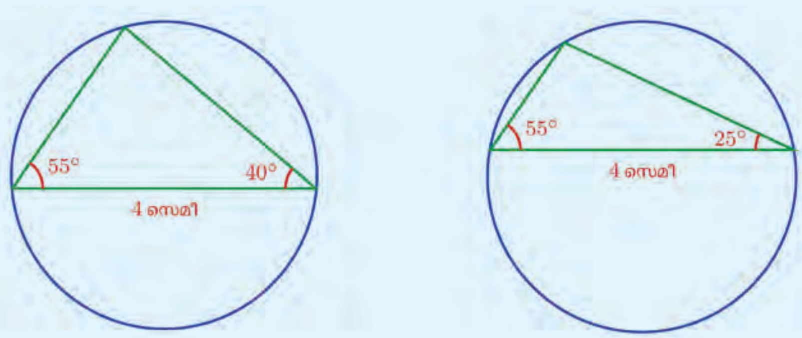
ഇവിടെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം

$1 : \sin 40° : \sin 50°$ എന്നതും ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളിലെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധവും ഒന്നുതന്നെയാണെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇപ്പോൾ ഈ അംശബന്ധം കണക്കാക്കാനുള്ള വഴിയുമായി.



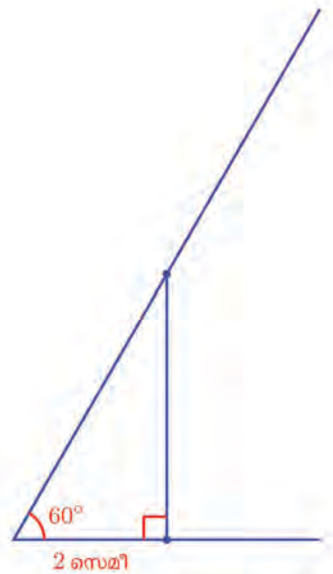
ചിത്രങ്ങളിൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും അവയുടെ പരിവൃത്തങ്ങളും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



സൈൻ പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച്, രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെയും വ്യാസവും, രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളവും മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.

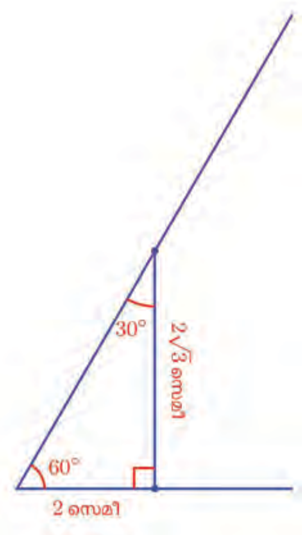
മറ്റൊരളവ്

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



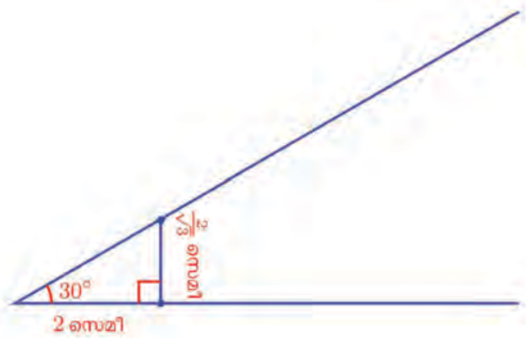
ഇതിലെ ലംബത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

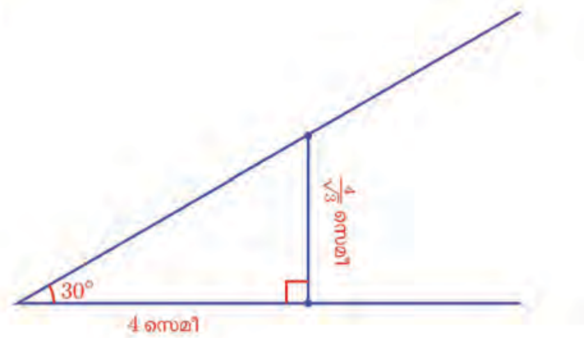
ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആണല്ലോ. ഏറ്റവും ചെറിയ വശം 2 സെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ ഇടത്തരം വശം $2\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്റർ. ഇതുതന്നെയാണ് ലംബത്തിന്റെ ഉയരവും:



ഇനി ഈ കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലെ ഏതു ബിന്ദു എടുത്ത് മറ്റേ വശത്തിനു ലംബം വരച്ചാലും, ലംബത്തിന്റെ ഉയരം, കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങു തന്നെ ആയിരിക്കുമല്ലോ.

30° കോണെടുത്താലോ ?





ലംബത്തിന്റെ ഉയരം, മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ഭാഗം.

45° കോൺ ആയാലോ ?

ഇങ്ങനെ കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മറ്റേ വശത്തേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ ഉയരം, കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങ്, അല്ലെങ്കിൽ ഭാഗം, ആണെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയെ കോണിന്റെ **ടാൻജെന്റ് (Tangent)** എന്നു പറയുകയും, **tan** എന്നു ചുരുക്കി എഴുതുകയും ചെയ്യും. അപ്പോൾ മുകളിൽ കണ്ട ഉദാഹരണങ്ങളിൽ

$$\tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

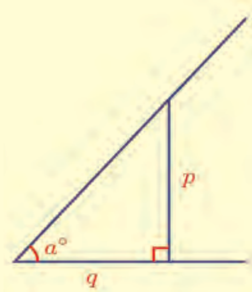
$$\tan 45° = 1$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ,

സൈൻ, കോസൈൻ പോലെ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ടാൻ കാണുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. നീളം 1 ആയി AB എന്ന വരയും B യിലൂടെ AB യ്ക്ക് ലംബവും വരയ്ക്കുക. ഒരു Angle Slider, a ഉണ്ടാക്കുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B, A ഇവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി a എന്നു കൊടുക്കുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു B' ലഭിക്കും. A, B' ഇവയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വര വരച്ച് അത് B യിൽ വരച്ച ലംബവുമായി കൂട്ടി മുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇനി ആവശ്യമില്ലാത്ത വരകളും ബിന്ദുക്കളും മറച്ച് വയ്ക്കാം. BC യുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇത് കോൺ A യുടെ ടാൻ അളവാണ് (എന്തുകൊണ്ട് ?). ടാൻ അളവ് എത്രവരെയാകാം ?

$a°$ കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ ഉയരം p യും, കോണിന്റെ മൂലയിൽനിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലം q യും ആണെങ്കിൽ,

$$\tan a° = \frac{p}{q}$$



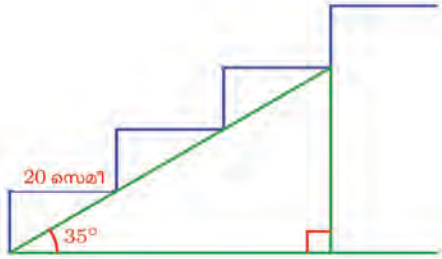
sin, cos ഇവയെപ്പോലെ tan നെയും മട്ടത്രികോണം ഉപയോഗിച്ചു പറയാം:

ഒരു കോൺ $a°$ ആയ മട്ടത്രികോണത്തിൽ,

$$\tan a° = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{സമീപവശം}}$$

കോണിന്റെ ടാൻ അളവുപയോഗിക്കുന്ന ഒരു സന്ദർഭം നോക്കാം.

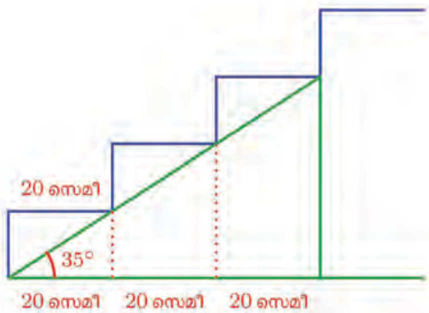
ഒരു പടിക്കെട്ടിന്റെ അളവുകൾ ഇങ്ങനെയാണ്:



മൂന്നാമത്തെ പടി എത്ര ഉയരത്തിലാണെന്നു കണക്കാക്കണം.

ചിത്രത്തിലെ മട്ടത്രികോണത്തിൽ 35° കോണിന്റെ എതിർ വശമാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്. അതിന് സമീപവശത്തിനെ tan 35° കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി.

സമീപവശം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ? ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



അപ്പോൾ മൂന്നാം പടിയുടെ ഉയരം, $60 \times \tan 35°$ സെന്റിമീറ്റർ.

പട്ടികയിൽ നിന്ന്

$$\tan 35° \approx 0.7002$$

എന്നു കാണാം.

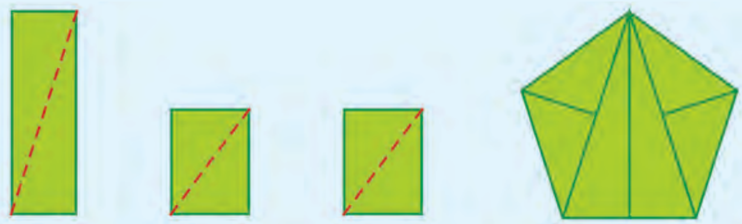
ഉയരം ഏകദേശം

$$60 \times 0.7002 = 42.012 \approx 42 \text{ സെമീ}$$

(1) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 50° ആണ്; ചെറിയ വികർണ്ണം 6 സെന്റിമീറ്ററും. അതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

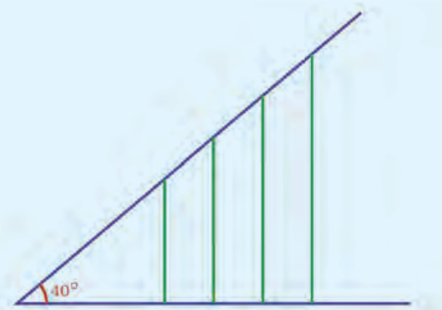
(2) മതിലിന്മേൽ ഒരു ഏണി ചാരി വച്ചിരിക്കുന്നു. ഏണിയുടെ ചുവട് മതിലിൽ നിന്ന് 2 മീറ്റർ അകലെയാണ്; ഏണിയും തറയുമായുള്ള കോൺ 40° യും. ഏണിയുടെ മുകളറ്റം, തറയിൽനിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലാണ് ?

(3) മൂന്നു ചതുരങ്ങൾ വികർണ്ണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, ചുവടെക്കാണുന്നതു പോലെ ചേർത്തുവച്ച്, ഒരു സമപഞ്ചഭുജമുണ്ടാക്കണം:



പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 30 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമെങ്കിൽ ചതുരങ്ങളുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം ?

(4) ചിത്രത്തിലെ കുത്തനെയുള്ള വരകൾ ഒരു സെന്റിമീറ്റർ അകലം ഇടവിട്ടാണ് വരച്ചിരിക്കുന്നത്.

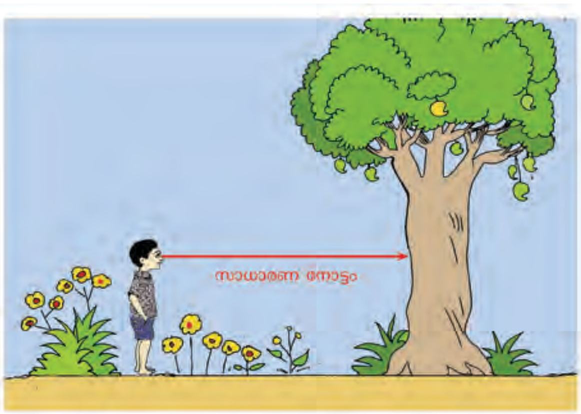


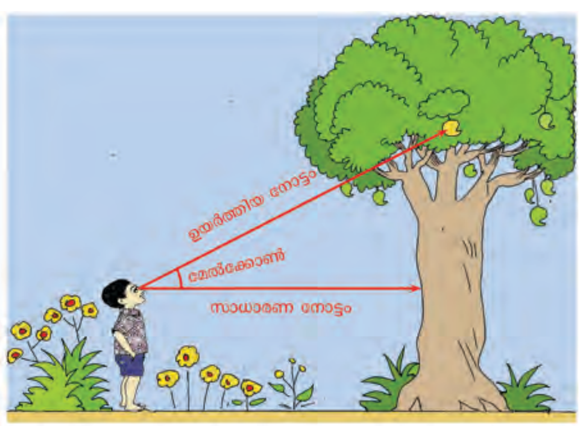
അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക. പൊതുവ്യത്യാസം എത്രയാണ് ?

(5) വശം 10 സെന്റിമീറ്ററായ സമപഞ്ചഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളും

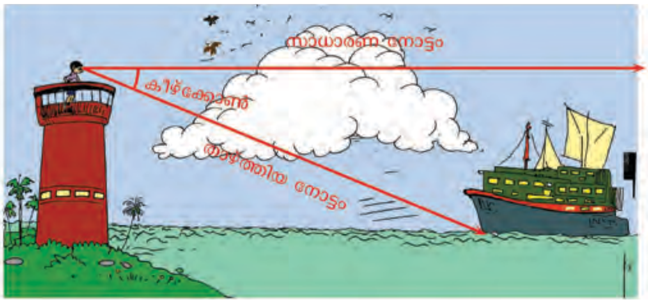
നമ്മേക്കാൾ ഉയരത്തിലുള്ളവ കാണാൻ, തല അല്പം ഉയർത്തണമല്ലോ; ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:





സാധാരണയായി നമ്മുടെ നോട്ടത്തിന്റെ പാത നിലത്തിനു സമാന്തരമാണ്; ഉയരത്തിലുള്ളവയെ നോക്കുമ്പോൾ, ഇത് മേൽപ്പോട്ടുയരും. ഈ രണ്ടു വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണിനെ **മേൽക്കോൺ (Angle of elevation)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

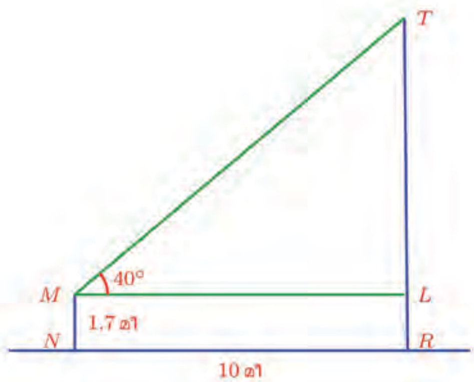
ഇതുപോലെ ഉയരത്തിൽ നിൽക്കുമ്പോൾ താഴെയുള്ളവയെ കാണാൻ, നോട്ടം താഴ്ത്തേണ്ടി വരുമല്ലോ;



ഇങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന കോണിനെ **കീഴ്ക്കോൺ (Angle of depression)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇത്തരം കോണുകൾ അളക്കുന്നത് **ക്ലൈനോമീറ്റർ (Clinometer)** എന്ന ഉപകരണം ഉപയോഗിച്ചാണ്. നേരിട്ടളക്കാൻ കഴിയാത്ത അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളുമെല്ലാം ക്ലൈനോമീറ്ററുപയോഗിച്ചു കോണളന്നും, ടാൻ ഉപയോഗിച്ചു കണക്കുകൂട്ടിയുമാണ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം:

ഒരു മരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് 10 മീറ്റർ അകലെ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ, മരത്തിന് മുകളറ്റം 40° മേൽക്കോണിൽ കാണുന്നു, അയാളുടെ ഉയരം 1.7 മീറ്ററാണ്. മരത്തിന് എന്തു പൊക്കമുണ്ട് ?



ചിത്രത്തിൽ MN എന്ന വര നോക്കുന്ന ആളിനേയും, TR മരത്തിനെയുമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ചിത്രത്തിൽനിന്ന് (പട്ടികയും ഉപയോഗിച്ച്),

$$\tan 40° = \frac{TL}{ML}$$

$$TL = ML \tan 40° \approx 10 \times 0.8391 = 8.391$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

$$TR = TL + LR = TL + MN = 8.391 + 1.7 = 10.091$$

$$TR \approx 10.09$$

അതായത് മരത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം 10.09 മീറ്ററാണ്.

ക്ലൈനോമീറ്റർ

മേൽക്കോണും കീഴ്ക്കോണും അളക്കാനുള്ള ക്ലൈനോമീറ്റർ എന്ന ഉപകരണത്തിന്റെ ഒരു ലഘുരൂപം നമുക്കും ഉണ്ടാക്കാം.

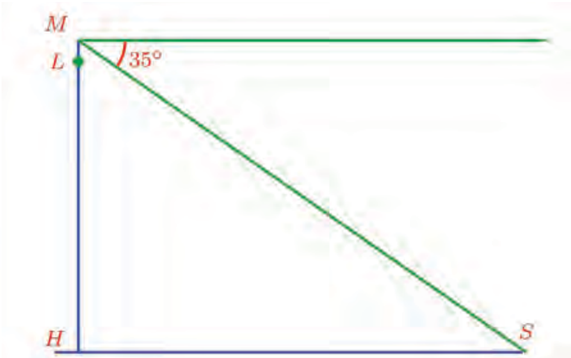
ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു കോൺമാപിനിയുടെ നേർഭാഗത്ത് ഒരു കുഴൽ ഉറപ്പിക്കുക. ഇതിൽ നിന്ന്, കോൺമാപിനിയുടെ നടുക്കുകൂടി വലിഞ്ഞു കിടക്കുന്നതരത്തിൽ, അറ്റത്ത് ഒരു ചെറിയ ഭാരം തൂക്കിയ ചരട് കെട്ടിയിടുക.

ഒരു മരത്തിന്റെയോ കെട്ടിടത്തിന്റെയോ മുകളറ്റം, കുഴലിലൂടെ നോക്കാൻ കോൺമാപിനി ചരിച്ചുയർത്തണം. താഴത്തെ ഭാരം കാരണം, ചരട് അപ്പോഴും തറയ്ക്കു ലംബമായിരിക്കും. ചരടിനും കോൺമാപിനിയിലെ 90° വരയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണാണ്, ഈ നോട്ടത്തിന്റെ മേൽക്കോൺ.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

1.8 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ 25 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ മുകളിൽനിന്ന് നോക്കിയപ്പോൾ, 35° കീഴ്ക്കോണിൽ ഒരു ബോട്ട് കണ്ടു. അത് ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്ന് എത്ര അകലെയാണ്?

ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:



ഇതിൽ LH ലൈറ്റ്ഹൗസും, ML അതിനു മുകളിൽ നിൽക്കുന്നയാളുമാണ്. S ആണു ബോട്ട്. കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് HS.

പറഞ്ഞിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളനുസരിച്ച്

$$MH = ML + LH = 25 + 1.8 = 26.8$$

കൂടാതെ $\angle HMS = 55°$

അപ്പോൾ MHS എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

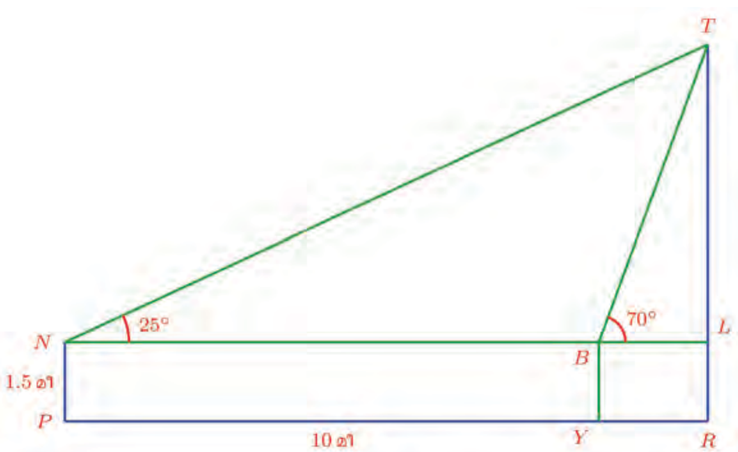
$$HS = MH \tan 55° \approx 26.8 \times 1.4281 \approx 38.27$$

അതായത്, ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് ഏകദേശം 38.27 മീറ്റർ അകലെയാണ് ബോട്ട്.

ഒരു കണക്കു കൂടി:

ഒരു തോട്ടിനരികത്തു നിൽക്കുന്ന കുട്ടി, അക്കരയോടു ചേർന്നു നിൽക്കുന്ന ഒരു മരത്തിന്റെ മുകളറ്റം 70° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. 10 മീറ്റർ പുറകോട്ടു മാറി നോക്കിയപ്പോൾ, അത് 25° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുട്ടിയുടെ ഉയരം 1.5 മീറ്റർ. തോടിന്റെ വീതിയും, മരത്തിന്റെ ഉയരവും കണക്കാക്കണം.

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ TR മരം, BY കുട്ടി ആദ്യം നിന്ന സ്ഥാനം, NP കുട്ടിയുടെ പുതിയ സ്ഥാനം.



കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്, YR ഉം, TR ഉം.

ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

$YR = BL$ $\quad TR = TL + LR = TL + 1.5$

ആയതിനാൽ, BL ഉം TL ഉം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

$$BL = x \quad TL = y$$

എന്നെടുത്താൽ BTL എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$y = x \tan 70° \approx 2.7475x$$

എന്നും, NTL എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$y = (x + 10) \tan 25° \approx 0.4663(x + 10) = 0.4663x + 4.663$$

എന്നും കിട്ടും. അപ്പോൾ

$$2.7475x \approx 0.4663x + 4.663$$

എന്നാകുമല്ലോ. ഇതിൽനിന്ന്

$$x \approx \frac{4.663}{2.2812} \approx 2.044$$

എന്ന് (കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച്) കണ്ടുപിടിക്കാം. ഇതുപയോഗിച്ച്

$$y \approx 2.7475 \times 2.044 \approx 5.616$$

എന്നും കാണാം. അതായത്, തോടിന്റെ വീതി ഏകദേശം 2.04 മീറ്ററും, മരത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം 5.62 + 1.5 = 7.12 മീറ്ററുമാണ്.

(1) സൂര്യൻ 40° മേൽക്കോണിൽ കാണപ്പെടുമ്പോൾ, ഒരു മരത്തിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം 18 മീറ്ററാണ്.

(i) മരത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ് ?

(ii) സൂര്യൻ 80° മേൽക്കോണിൽ കാണപ്പെടുമ്പോൾ, നിഴലിന്റെ നീളം എത്രയായിരിക്കും ?

(2) ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും ഒരാൾ 30 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ഒരു കടയുടെ ചുവട് 25° കീഴ്ക്കോണിൽ കാണുന്നു. കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു വൈദ്യുതിത്തൂണിന്റെ മുകളറ്റത്തുനിന്ന് രണ്ട് ഇരുമ്പു കമ്പികൾ ഇരുവശത്തേക്കും വലിച്ച് തറയിൽ ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പികളുടെ ചുവടുകൾ തറയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ 55° യും 40° യും ആണ്; കമ്പികളുടെ ചുവടുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 25 മീറ്ററും. തൂണിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ് ?

(4) ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിൽക്കുന്ന 1.75 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ, 40 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ഒരു കുന്നിന്റെ മുകളറ്റം 60° മേൽക്കോണിൽ കാണുന്നു. ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളിൽനിന്നു നോക്കിയപ്പോൾ, അത് 50° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുന്നിന്റെയും, ഗോപുരത്തിന്റെയും ഉയരം കണക്കാക്കുക.

(5) ഒരു തോട്ടിനരികത്തു നിൽക്കുന്ന കുട്ടി, അക്കരയോടു ചേർന്നു നിൽക്കുന്ന ഒരു മരത്തിന്റെ മുകളറ്റം 80° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. 15 മീറ്റർ പുറകോട്ടു മാറി നോക്കിയപ്പോൾ, അത് 40° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുട്ടിയുടെ ഉയരം 1.5 മീറ്റർ. തോടിന്റെ വീതിയും, മരത്തിന്റെ ഉയരവും കണക്കാക്കുക.

ത്രികോണമിതി അളവുകൾ

കോൺ	sin	cos	tan
1	0.0175	0.9998	0.0175
2	0.0349	0.9994	0.0349
3	0.0523	0.9986	0.0524
4	0.0698	0.9976	0.0699
5	0.0872	0.9962	0.0875
6	0.1045	0.9945	0.1051
7	0.1219	0.9925	0.1228
8	0.1392	0.9903	0.1405
9	0.1564	0.9877	0.1584
10	0.1736	0.9848	0.1763
11	0.1908	0.9816	0.1944
12	0.2079	0.9781	0.2126
13	0.2250	0.9744	0.2309
14	0.2419	0.9703	0.2493
15	0.2588	0.9659	0.2679
16	0.2756	0.9613	0.2867
17	0.2924	0.9563	0.3057
18	0.3090	0.9511	0.3249
19	0.3256	0.9455	0.3443
20	0.3420	0.9397	0.364
21	0.3584	0.9336	0.3839
22	0.3746	0.9272	0.404
23	0.3907	0.9205	0.4245
24	0.4067	0.9135	0.4452
25	0.4226	0.9063	0.4663
26	0.4384	0.8988	0.4877
27	0.4540	0.8910	0.5095
28	0.4695	0.8829	0.5317
29	0.4848	0.8746	0.5543
30	0.5000	0.8660	0.5774
31	0.5150	0.8572	0.6009
32	0.5299	0.8480	0.6249
33	0.5446	0.8387	0.6494
34	0.5592	0.8290	0.6745
35	0.5736	0.8192	0.7002
36	0.5878	0.8090	0.7265
37	0.6018	0.7986	0.7536
38	0.6157	0.7880	0.7813
39	0.6293	0.7771	0.8098
40	0.6428	0.7660	0.8391
41	0.6561	0.7547	0.8693
42	0.6691	0.7431	0.9004
43	0.6820	0.7314	0.9325
44	0.6947	0.7193	0.9657
45	0.7071	0.7071	1.0000

കോൺ	sin	cos	tan
46	0.7193	0.6947	1.0355
47	0.7314	0.6820	1.0724
48	0.7431	0.6691	1.1106
49	0.7547	0.6561	1.1504
50	0.7660	0.6428	1.1918
51	0.7771	0.6293	1.2349
52	0.7880	0.6157	1.2799
53	0.7986	0.6018	1.3270
54	0.8090	0.5878	1.3764
55	0.8192	0.5736	1.4281
56	0.8290	0.5592	1.4826
57	0.8387	0.5446	1.5399
58	0.8480	0.5299	1.6003
59	0.8572	0.5150	1.6643
60	0.8660	0.5000	1.7321
61	0.8746	0.4848	1.8040
62	0.8829	0.4695	1.8807
63	0.8910	0.4540	1.9626
64	0.8988	0.4384	2.0503
65	0.9063	0.4226	2.1445
66	0.9135	0.4067	2.2460
67	0.9205	0.3907	2.3559
68	0.9272	0.3746	2.4751
69	0.9336	0.3584	2.6051
70	0.9397	0.3420	2.7475
71	0.9455	0.3256	2.9042
72	0.9511	0.3090	3.0777
73	0.9563	0.2924	3.2709
74	0.9613	0.2756	3.4874
75	0.9659	0.2588	3.7321
76	0.9703	0.2419	4.0108
77	0.9744	0.2250	4.3315
78	0.9781	0.2079	4.7046
79	0.9816	0.1908	5.1446
80	0.9848	0.1736	5.6713
81	0.9877	0.1564	6.3138
82	0.9903	0.1392	7.1154
83	0.9925	0.1219	8.1443
84	0.9945	0.1045	9.5144
85	0.9962	0.0872	11.4301
86	0.9976	0.0698	14.3007
87	0.9986	0.0523	19.0811
88	0.9994	0.0349	28.6363
89	0.9998	0.0175	57.2900