

20

Optional Paper
Mathematics
Paper - I

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 200

IMPORTANT NOTES / महत्वपूर्ण निर्देश

- (A) Please fill up the OMR Sheet of this Question Answer Booklet properly before answering. Please also see the directions printed on the obverse before filling it.
प्रश्नोत्तर पुस्तिका में प्रश्न हल करने से पूर्व उसके संलग्न ओ.एम.आर. पत्रक को भली प्रकार भर लें। उसे भरने हेतु उसके पृष्ठ भाग पर मुद्रित निर्देशों का अध्ययन कर लें।
- (B) The question paper has been divided into three Parts - A, B and C. The number of questions to be attempted and their marks are indicated in each part.
प्रश्न-पत्र अ, ब और स तीन भागों में विभाजित है। प्रत्येक भाग में से किये जाने वाले प्रश्नों की संख्या और उनके अंक उस भाग में अंकित किये गये हैं।
- (C) Attempt answers *either* in Hindi or English, not in both.
उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी भाषा में से किसी एक में दीजिये, दोनों में नहीं।
- (D) Answers to all the questions of each part should be written continuously in the script and should not be mixed with those of other parts. In the event of candidate writing answers to a question in a part different to the one to which the question belongs, the question will not be assessed by the examiner.
उत्तर पुस्तिका में प्रत्येक भाग के समस्त प्रश्नों के उत्तर क्रमवार देने चाहिये तथा एक भाग में दूसरे भाग के उत्तर नहीं मिलाने चाहिये। एक भाग में दूसरे भाग के प्रश्न के उत्तर लिखे जाने पर ऐसे प्रश्न को जाँचा नहीं जा सकता है।
- (E) The candidates should not write the answers beyond the limit of words prescribed in parts A, B and C failing this the marks can be deducted.
अभ्यर्थियों को भाग अ, ब और स में अपने उत्तर निर्धारित शब्दों की सीमा से अधिक नहीं लिखने चाहिये। इसका उल्लंघन करने पर अंक काटे जा सकते हैं।
- (F) In case the candidate makes any identification mark i.e. Roll No./Name/Telephone No./Mobile No. or any other marking either outside or inside the answer book, it would be treated as resorting to using unfair means. In such a case his candidature shall be rejected for the entire examination by the Commission.
अभ्यर्थी द्वारा उत्तर पुस्तिका के अंदर अथवा बाहर पहचान चिन्ह यथा - रोल नम्बर / नाम / मोबाईल नम्बर / टेलीफोन नम्बर लिखे जाने या अन्य कोई निशान इत्यादि अंकित किये जाने को अनुचित साधन मान जायेगा। आयोग द्वारा ऐसा पाये जाने पर अभ्यर्थी की सम्पूर्ण परीक्षा में अभ्यर्थिता रद्द कर दी जायेगी।



BLANK PAGE



Note : Attempt all the **twenty** questions. Each question carries 2 marks. Answer should not exceed 15 words.

नोट : समस्त २० प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के लिये २ अंक निर्धारित है। उत्तर १५ शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिये।

1 Define Linear operator.

रैखिक संकारक को परिभाषित कीजिए ।

2 Is every n -dimensional vectorspace over the field F is isomorphic to the space F^n .
क्या क्षेत्र F पर प्रत्येक n विमयि सदिश समष्टि स्पेश F^n के तुल्यकारी है ?

3 Define demension of a subspace.

सबस्पेश (उपआकाश) की सीमा को परिभाषित कीजिए ।



- 4 Write down the formula for polar subnormal of a curve.
एक वक्र के ध्रुवीय अधोलंब का सूत्र लिखिए ।

- 5 What is the condition of consistency of the equation $AX=B$.
समीकरण $AX=B$ की संगति प्रतिबंध क्या है ।

- 6 Define Hyperspace.
अधिआकाश की परिभाषा दीजिए ।



7 State Cayley Hamilton theorem.
कैली हेमिल्टन प्रमेय का कथन कीजिए ।

8 Define normal subgroup.
असामान्य उपसमूह की परिभाषा दीजिए ।

9 State Cauchy's theorem.
कोशी के प्रमेय का कथन कीजिए ।



10 Is function $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ derivable at $x=0$?

क्या फलन $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x=0$ पर अवकलनीय है ?

11 Find the centre of the conic, $17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$

शंकु $17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$ का केन्द्र ज्ञात कीजिए ।

12 State Mean value theo of integral calculus.

समाकलन गणित के मध्यमान प्रमेय का कथन कीजिए ।



13 State Weirstrass's M test.

वायरेस ट्रास के M टेस्ट का कथन कीजिए ।

14 State first law of isomorphism of a group.

किसी समूह के प्रथम समाकृतिकता नियम का कथन कीजिए ।

15 Write down the equation of tangent at the point $\theta = \alpha$ to the conic $\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos \theta$.

शंकु $\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos \theta$ के बिन्दु $\theta = \alpha$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण लिखिए ।



16 Define Cauchy sequence.
कोशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए ।

17 State liouville's theo.
लाववलीज प्रमेय का कथन कीजिए ।

18 State Heine Borel-theorem.
हीनेबोरेल प्रमेय का कथन कीजिए ।



19 The rank of the product of two matrices can not exceed the rank of either factor. Is it true or false ?

दो आव्यूहों के गुणन फल की कोटि उनमें से किसी के भी कोटि से अधिक नहीं हो सकती । क्या यह कथन सत्य है या असत्य है ।

20 Is $\{1, -1, i\}$ a group under multiplication?

क्या $\{1, -1, i\}$ गुणन संक्रिया के अन्तर्गत समूह है ?



Note : Attempt all the twelve questions. Each question carries 5 marks. Answer should not exceed 50 words.

नोट : समस्त १२ प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के ५ अंक निर्धारित हैं। उत्तर ५० शब्दों के अधिक नहीं होना चाहिए।

21 If W_1 and W_2 are two subspaces of $V(F)$ prove that W_1+W_2 is a subspace of $V(F)$.
यदि $V(F)$ के दो उपसमष्टि W_1 और W_2 है तो सिद्ध कीजिए कि W_1+W_2 भी $V(F)$ का उपसमष्टि है।

22 Evaluate in terms of gamma function the integral $\int_0^{\infty} e^{-x^4} dx$.

समाकलन का मान गामा फलन में निकालिए : $\int_0^{\infty} e^{-x^4} dx$



23 If U is an ideal of a ring R and $1 \in U$ then show that $U=R$.
यदि U वलय R का एक आइडियल (आदर्श) है और $1 \in U$ तब सिद्ध कीजिए कि $U=R$.

24 Find the singularities of the function : $f(z) = \operatorname{cosec} \frac{1}{z}$.
फलन $f(z) = \operatorname{cosec} \frac{1}{z}$ भी विचित्रतायें ज्ञात कीजिए ।



25 Find the cartesian formula for radius of curvature.

वक्रता त्रिज्या का कार्टिय सूत्र ज्ञात कीजिए ।

26 Show that the function defined as $f(z) = \frac{\sin z}{z}, z \neq 0, =1, z=0$. is entire.

दिखाइए कि फलन $f(z) = \frac{\sin z}{z}, z \neq 0, =1, z=0$, सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है ।



- 27 Prove that the trace of a square matrix A is equal to the sum of its characteristic roots.
सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग आव्यूह का अनुरेख उसके अभिलाक्षणिक मूलों के योग के बराबर है ।

- 28 Prove that $\sqrt{2}$ is not a rational number.
सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या नहीं है ।



29 Prove that the characteristic roots of a real skew symmetric matrix are all purely imaginary or zero.

सिद्ध कीजिए कि एक वास्तविक विषम सममित आव्यूह के अभिलाक्षणिक मूल पूर्णतः काल्पनिक या शून्य हैं।

30 Prove that every subgroup of an abelian group is normal.

सिद्ध कीजिए कि एक अबेलियन समूह का प्रत्येक उपसमूह सामान्य है।



31 Show that a sequence $\{S_n\}$ converges if for $E>0$ $\exists m \in \mathbb{N}$ such that $|S_{n+p} - S_n| < E \forall n \geq m$ and $P>0$.

दिखाइए कि अनुक्रम $\{S_n\}$ अकिसारी है यदि $E>0$ के लिए $m \in \mathbb{N}$ ऐसा है जिससे $|S_{n+p} - S_n| < E$ प्रत्येक $n \geq m$ और $P>0$ के लिए।

32 A function $f(x)$ is defined as :
 $f(x) = \frac{x^2}{a} - a$ when $x < a$
= 0, when $x = a$
= $a - \frac{x^2}{a}$ when $x > a$, $a \neq 0$
Show that $f(x)$ is continuous at $x = a$.

दिखाइए कि फलन
 $f(x) = \frac{x^2}{a} - a$ जब $x < a$
= 0, जब $x = a$
= $a - \frac{x^2}{a}$ जब $x > a$, $a \neq 0$
बिन्दु $x = a$ पर संतत है।







Note : Attempt any 5 questions. Each question carries 20 marks. Answer should not exceed 200 words.

नोट : कोई भी ५ प्रश्न कीजिये। प्रत्येक प्रश्न के लिए २० अंक निर्धारित है। उत्तर २०० शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए।

33 Show that locus of poles of normal chords of parabola $y^2 = 4ax$ is $(x+2a)y^2 = -4a^2$.
दिखाइए कि परवलय $y^2 = 4ax$ के अभिलम्ब जीवा के ध्रुव का बिन्दु पथ $(x+2a)y^2 = -4a^2$ है।
5,5,10





34 Prove that a ring R is without zero divisors iff the cancellation law holds in R .

सिद्ध कीजिए कि एक वलय R बिना शून्य भाजक के है यदि केवल यदि R में कैंसिलेशन नियम लागू है ।





35 Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$, a is real.

मान निकालिए $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$, जहाँ a वास्तविक है ।





36 Find $(y_n)_0$ when $y = \sin(a \sin^{-1} x)$.

ज्ञात कीजिए : $(y_n)_0$. जब $y = \sin(a \sin^{-1} x)$.





37 If u is a homogeneous function of x and y of degree n . Show that

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u.$$

यदि यह है कि समघात को x या y अंश में समझाना चाहिए

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u.$$





38 Let $\{f_n(x)\}$ be a sequence of real valued functions on a set M which converges uniformly to the function $f(x)$ on M . If each $f_n(x)$ is continuous at $a \in M$, then show that $f(x)$ is also continuous at a .

माना कि उपक्रम $\{f_n(x)\}$ समुच्चय M के ऊपर एक वास्तविक मानों का फलन है जो कि M के ऊपर फलन $f(x)$ को एकसमान अभिसारित होता है। यदि प्रत्येक फलन $f_n(x)$ बिन्दु a ($a \in M$) पर संतत है तो दिखाइए कि $f(x)$ भी a पर संतत है।





- 39 Let F be a subfield of complex numbers and let T be the function from F^3 to F^3 such that $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2 + 2x_3)$. If (a, b, c) is a vector in F^3 , what are the conditions on a , b and c that the vector be in the range of T ? What is the rank of T ?
- यदि F एक मिश्रित संख्याओं का उपक्षेत्र है और $T : F^3$ से F^3 में एक फलन है जबकि $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2 + 2x_3)$ यदि (a, b, c) , F^3 में सदिश है तो a , b और c पर क्या प्रतिबंध है कि सदिश T के रेंज में हो ? T का रैंक क्या है ?





